

Дерево. Свойства дерева: единственность пути,
существование висячей вершины, связь между числом
вершин и числом рёбер.

Ученицы 9а класса: Максимова Мария
Вассова Виктория, Егорова Полина

Повторим понятия

Графом называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. При этом **точки** называются **вершинами графа**, **а линии — рёбрами**.

Рёбра можно изобразить дугами или отрезками.

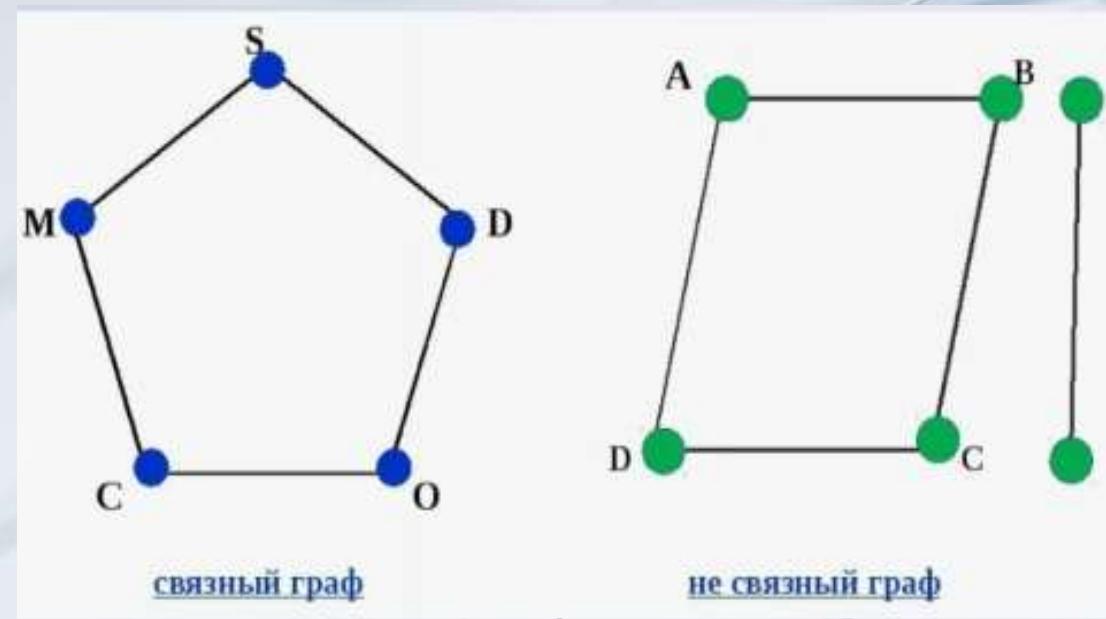
Каждое ребро соединяет две вершины. Вершина не обязательно должна быть соединена с другими вершинами.

Если из вершины не выходит ни одно ребро, то её называют **изолированной**.



Повторим понятия

Если в графе любые две вершины соединены путём, то такой граф называется **связным**.



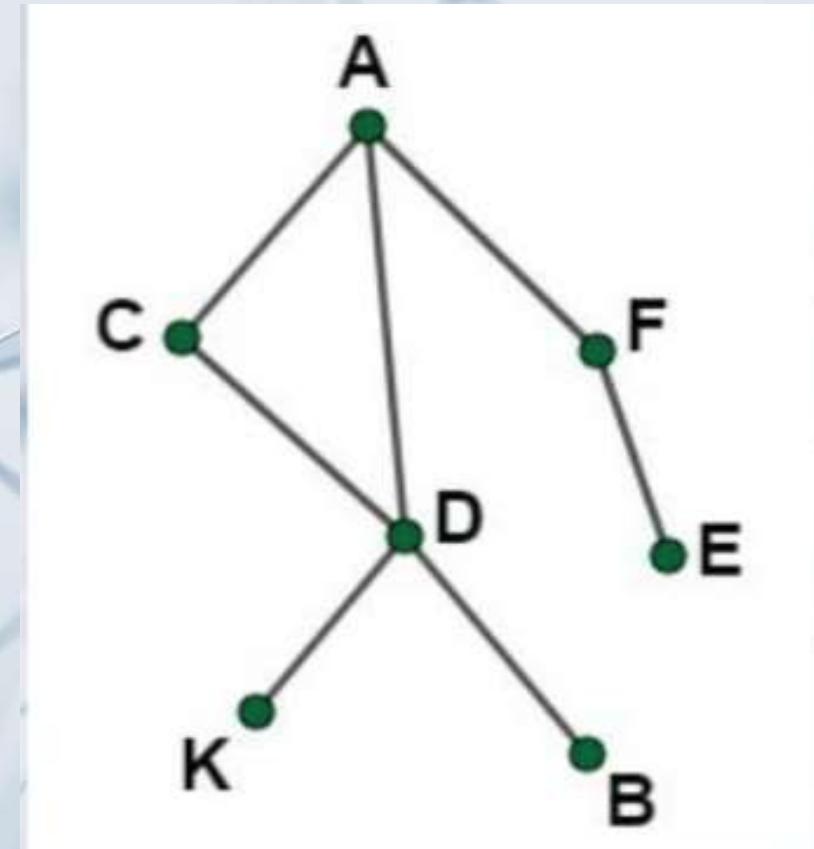
Путём в графе от вершины А до вершины В назовём такую последовательность рёбер графа, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину.

Например, из А в В существует два пути:

AD – DB и AC – CD – DB

Длина пути — это количество рёбер в этом пути.

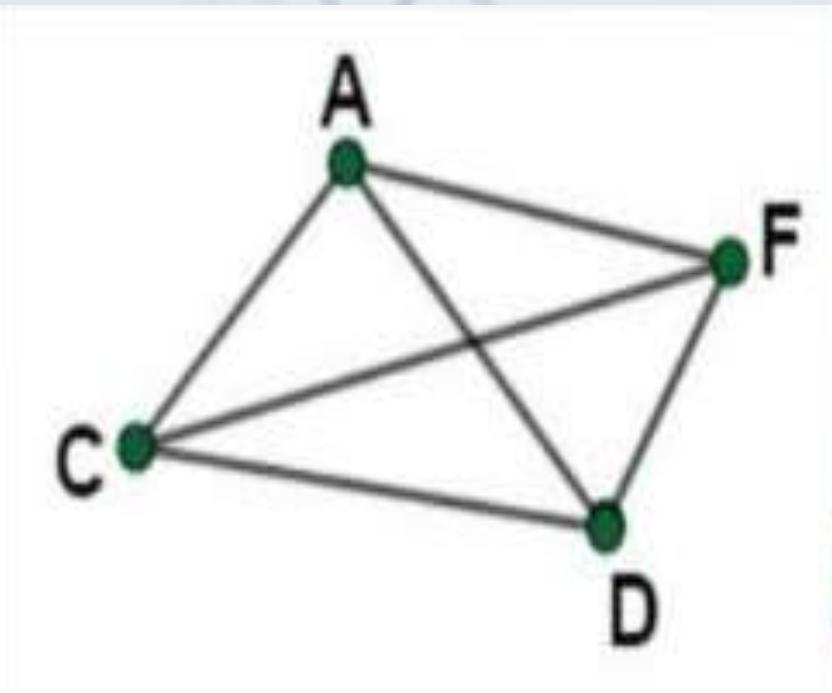
Длина пути AD – DB равна 2, а длина пути AC – CD – DB равна 3.



Граф, у которого каждая вершина соединена ребром с любой другой вершиной, называется **ПОЛНЫМ**.

Чтобы найти количество рёбер в полном графе, у которого n - вершин, нужно воспользоваться формулой:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$



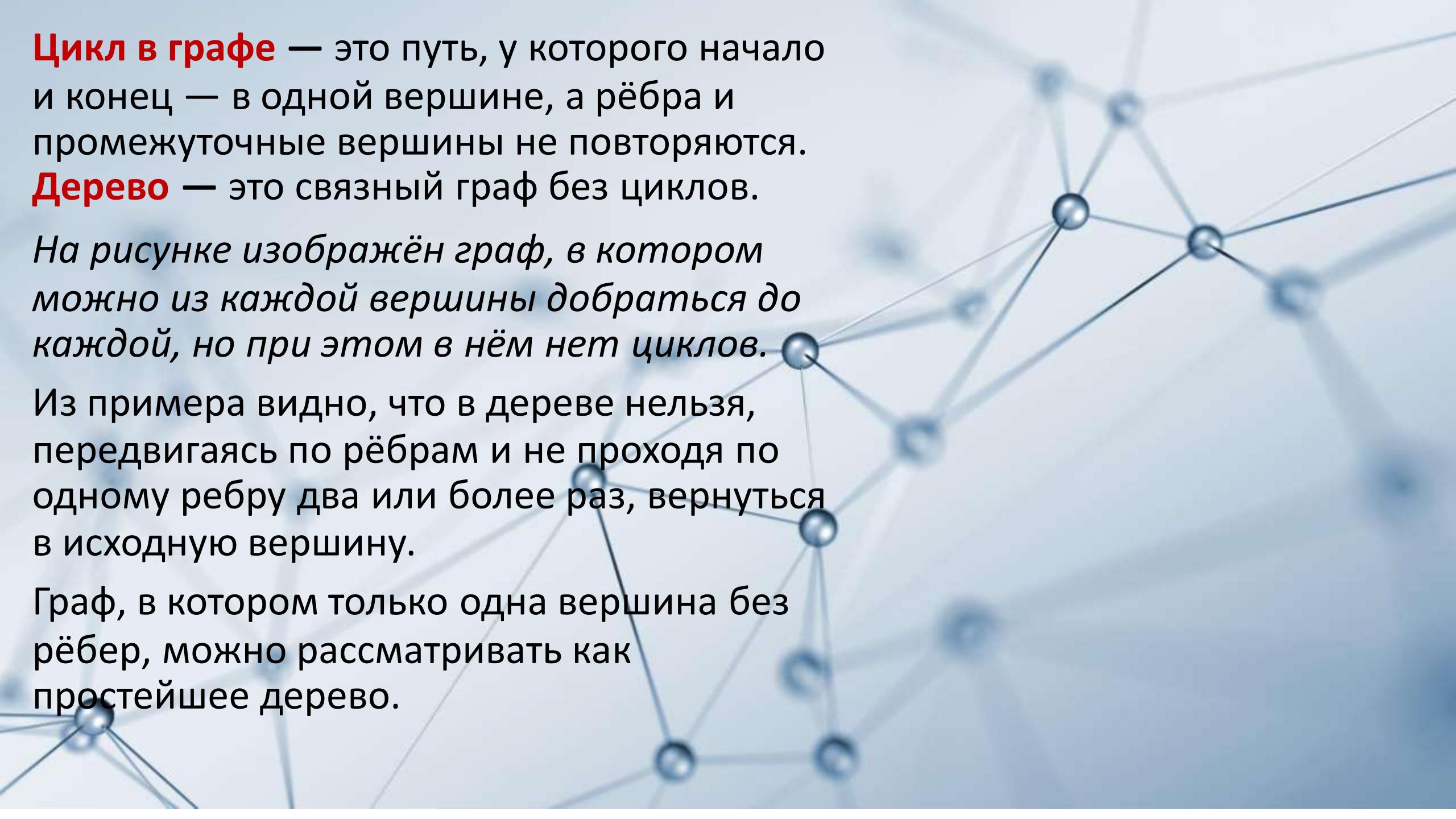
Цикл в графе — это путь, у которого начало и конец — в одной вершине, а рёбра и промежуточные вершины не повторяются.

Дерево — это связный граф без циклов.

На рисунке изображён граф, в котором можно из каждой вершины добраться до каждой, но при этом в нём нет циклов.

Из примера видно, что в дереве нельзя, передвигаясь по рёбрам и не проходя по одному ребру два или более раз, вернуться в исходную вершину.

Граф, в котором только одна вершина без рёбер, можно рассматривать как простейшее дерево.



Диаметр дерева — количество рёбер в максимальной цепи, т.е. длина цепи, связывающей две наиболее удалённые вершины.

В дереве, изображённом на рисунке наиболее удалёнными являются вершины L и D . Количество рёбер между ними равно 5.

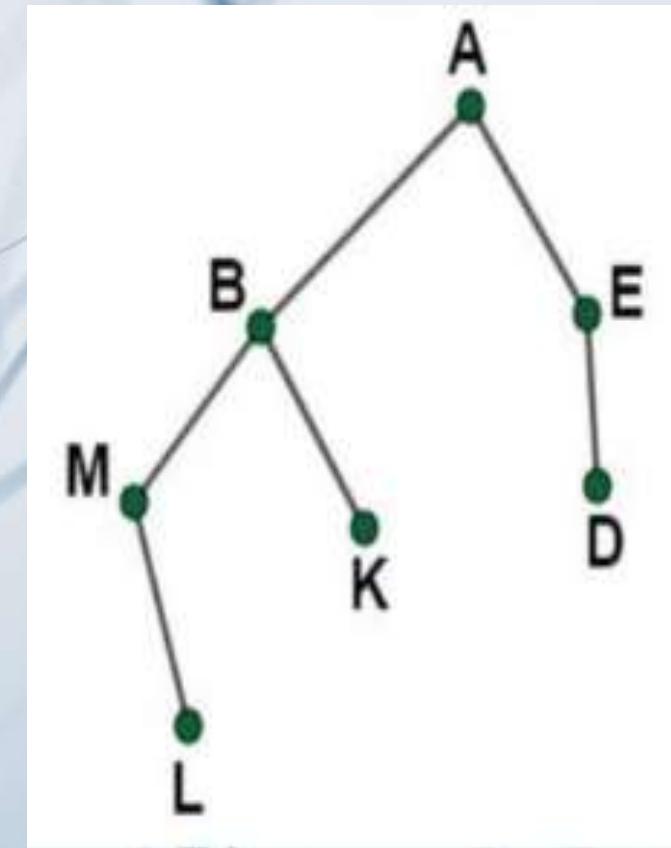
Значит, диаметр дерева на рисунке равен 5.

В любом дереве (в котором более одной

вершины) есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро.

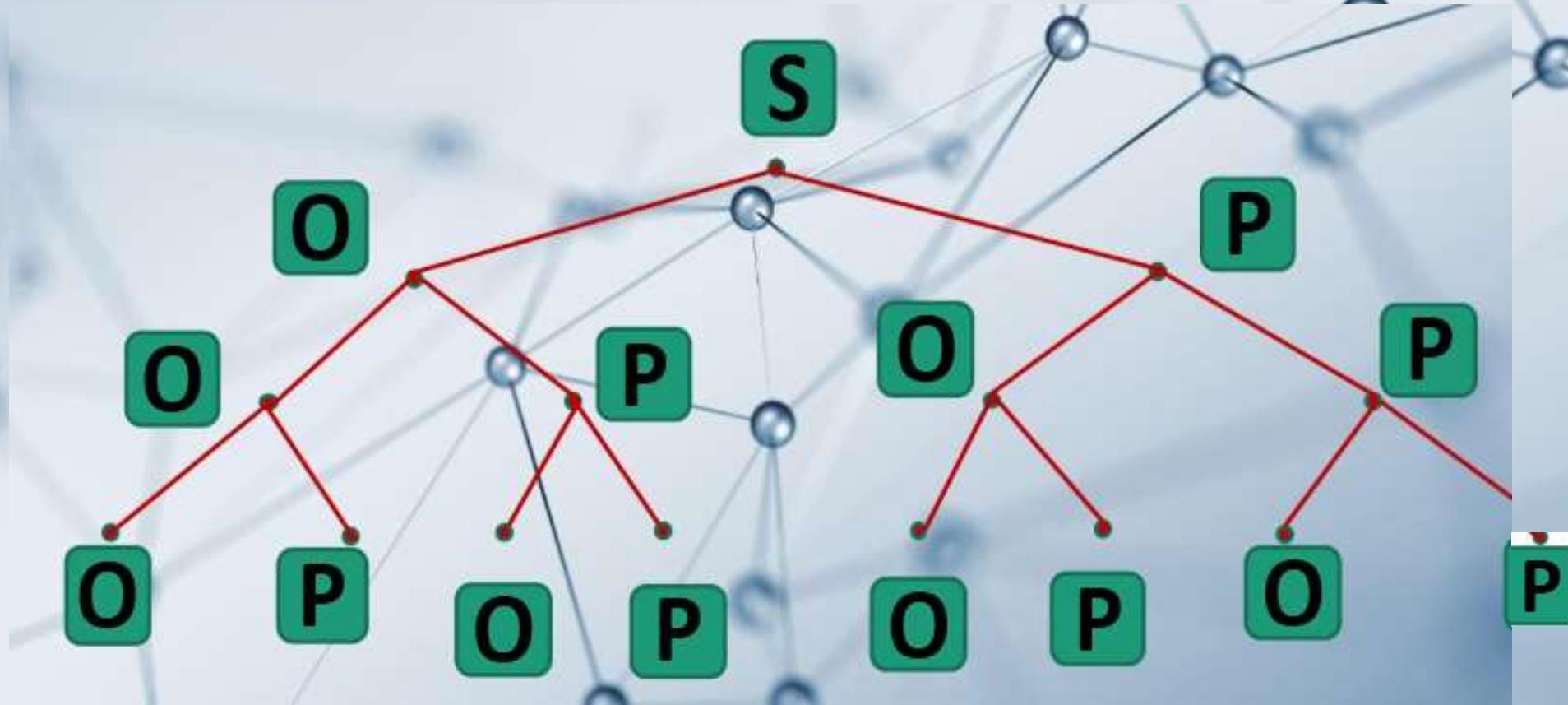
Такую вершину называют **концевой** или **висячей**.

На нашем рисунке эта вершина L, K, D .



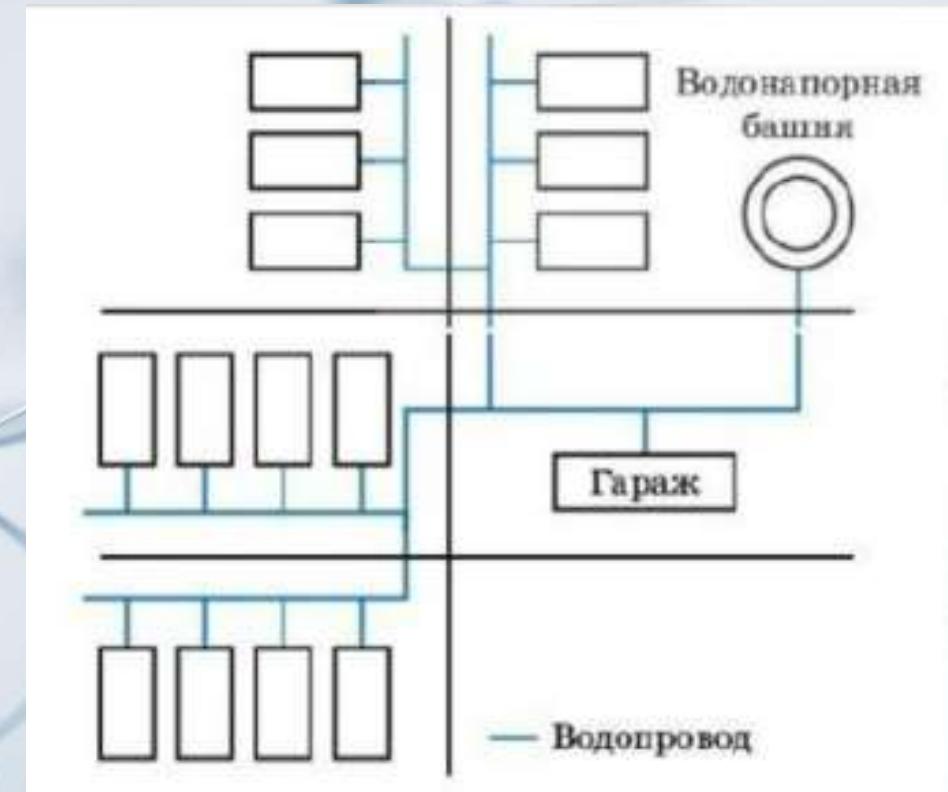
Пример 1

Возьмем симметричную монету и подбросим её три раза. Чтобы изобразить этот опыт, построим дерево

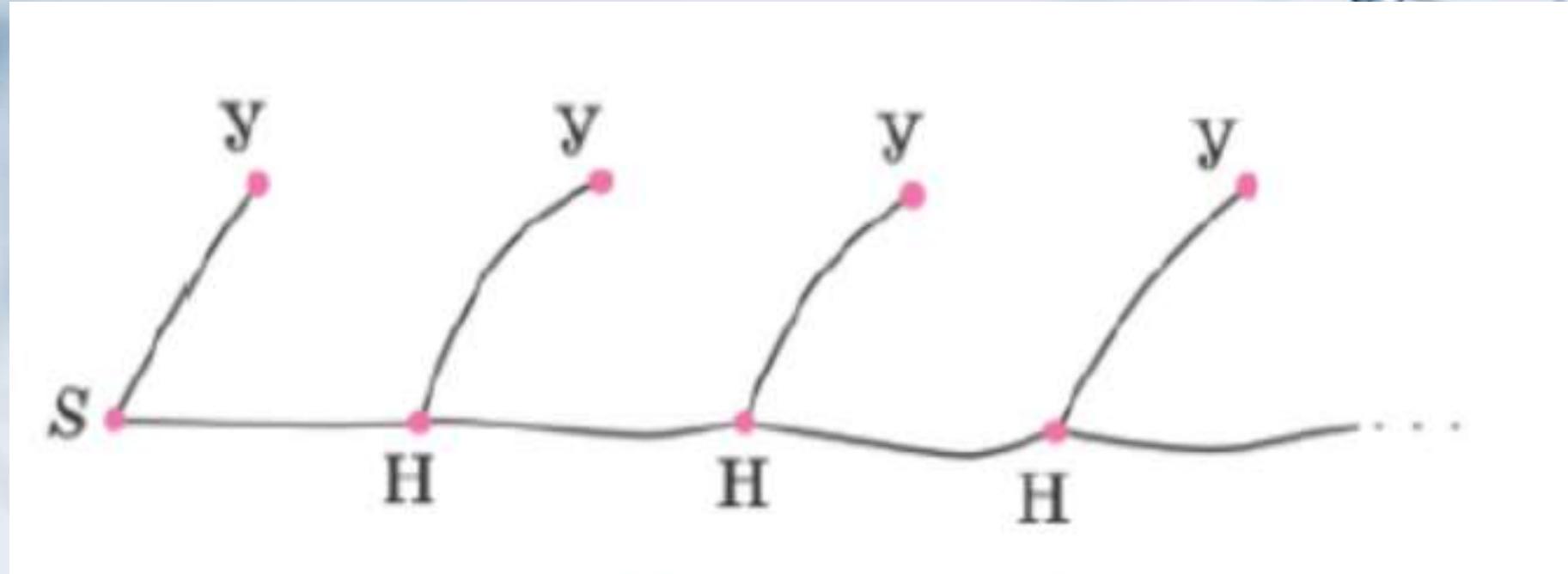


Название «дерево» и происходит оттого, что цепи «ветвятся», не образуя циклов. Разница только в том. Что в природе деревья растут снизу вверх. А математические деревья мы рисуем как нам удобно.

Рассмотрим пример водоснабжения в небольшом поселке. Трубы идут от водонапорной башни и ветвятся, пролегая вдоль улиц. Из больших труб проходят малые к домам. Вершина нашего так называемого дерева – водонапорная башня.



Бывают **бесконечные деревья**, то есть деревья, в которых бесконечно много вершин и ребер.



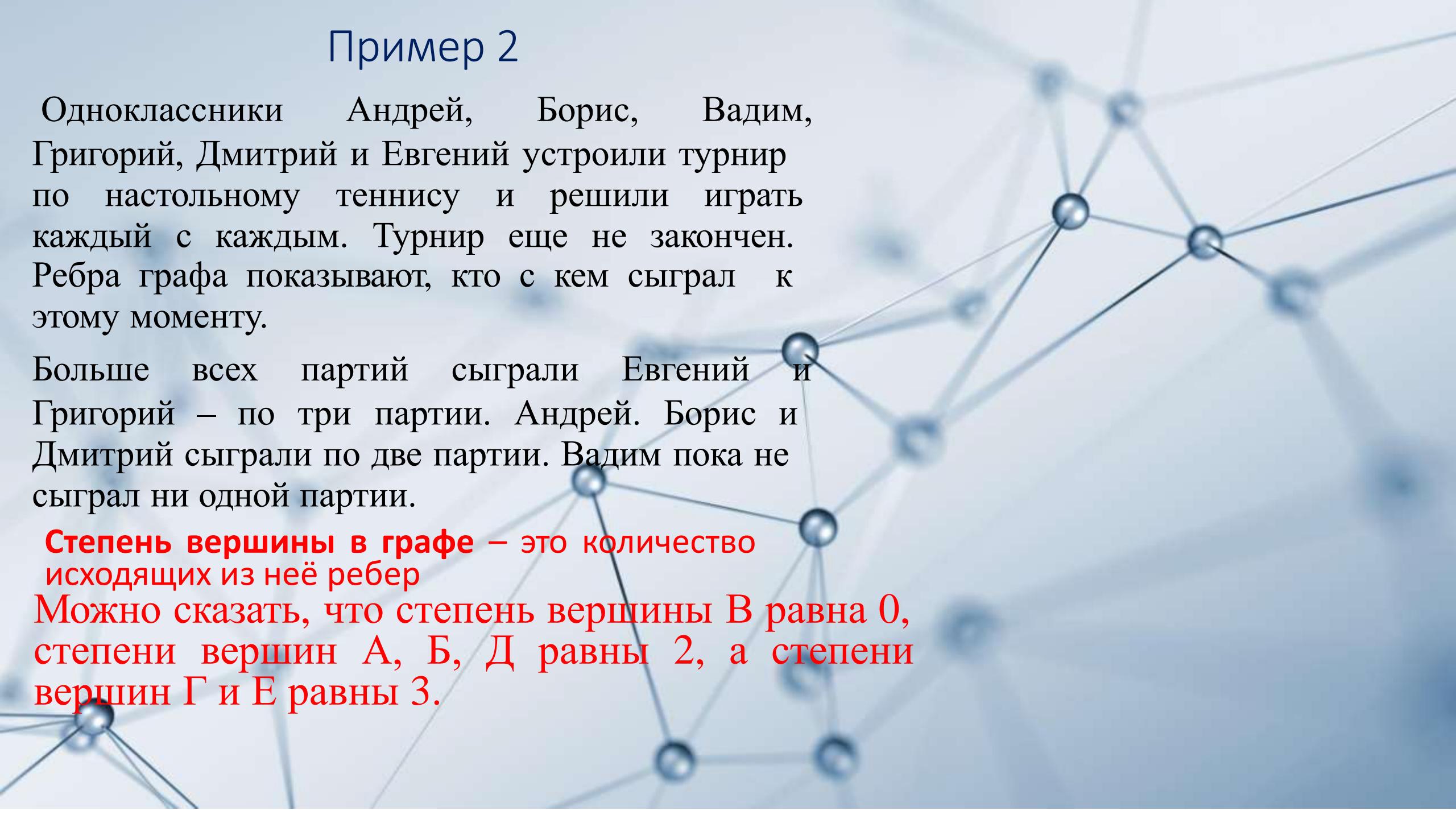
Пример 2

Одноклассники Андрей, Борис, Вадим, Григорий, Дмитрий и Евгений устроили турнир по настольному теннису и решили играть каждый с каждым. Турнир еще не закончен. Ребра графа показывают, кто с кем сыграл к этому моменту.

Больше всех партий сыграли Евгений и Григорий – по три партии. Андрей, Борис и Дмитрий сыграли по две партии. Вадим пока не сыграл ни одной партии.

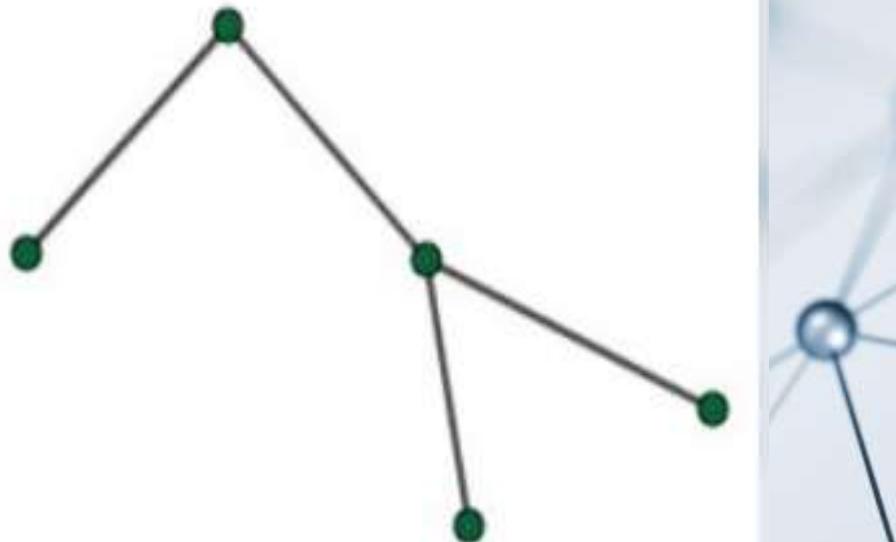
Степень вершины в графе – это количество исходящих из неё ребер

Можно сказать, что степень вершины В равна 0, степени вершин А, Б, Д равны 2, а степени вершин Г и Е равны 3.



1. Проверь себя!

На рисунке изображён граф.



1. Является ли граф, изображённый на рисунке, деревом?

Ответ: .

2. Сколько рёбер у данного графа?

Ответ: .

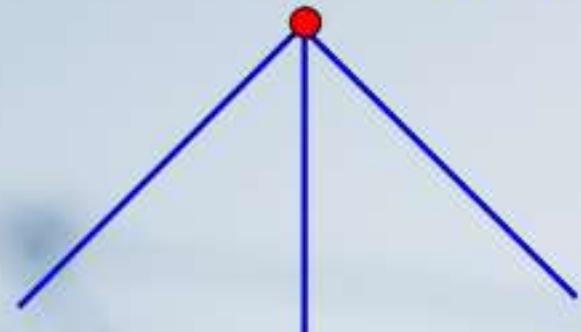
3. Сколько вершин у графа, изображённого на рисунке?

Ответ: .

4. Сколько концевых вершин у графа, изображённого на рисунке?

Ответ: .

Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется **нечетной**, а чётную степень – **чётной**.



Нечётная степень



Чётная степень

Так как у каждого ребра два конца, то сумма степеней всех вершин в два раза больше числа ребер, то есть четное число.

Теорема о сумме степеней вершин. В любом графе сумма степеней всех вершин является четным числом.

В любом графе количество вершин нечетной степени четно.

Свойства деревьев

Теорема. Любые две вершины в дереве соединены единственной цепью.

Свойство 1. Если из дерева удалить ребро. То граф перестанет быть связным.

1. У концевой (висячей) вершины степень равна 1.

Свойство 2. Если в дереве конечное число вершин и есть хотя бы одно ребро, то в таком дереве есть концевая вершина.

Свойство 3. В конечном дереве число ребер на 1 меньше числа вершин.

2. Проверь себя!

Существует ли дерево, в котором:

количество вершин равно **8**, а рёбер — **20**?

Ответ: ;

количество вершин равно **54**, а рёбер — **53**?

Ответ: ;

количество вершин равно **26**, а рёбер — **27**?

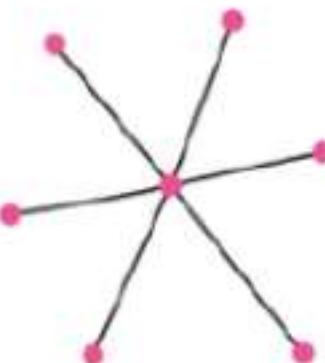
Ответ: .



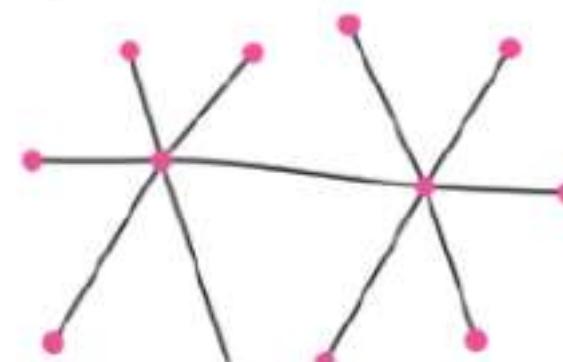
Задание 1

Какие из графов являются деревьями?

а)



б)



в)



г)



д)



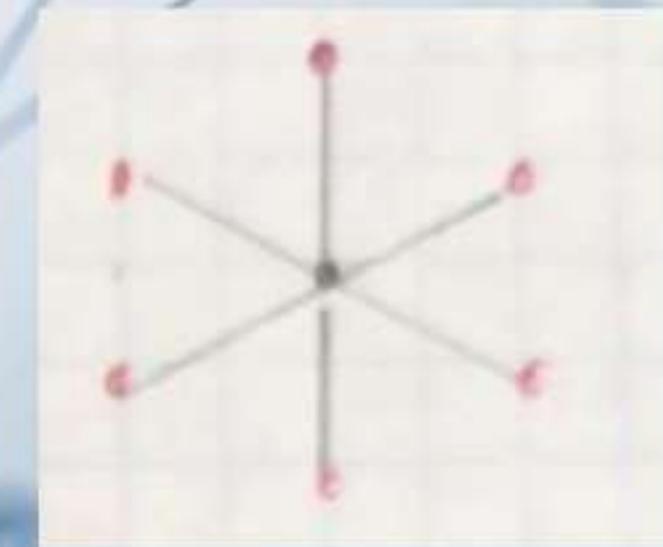
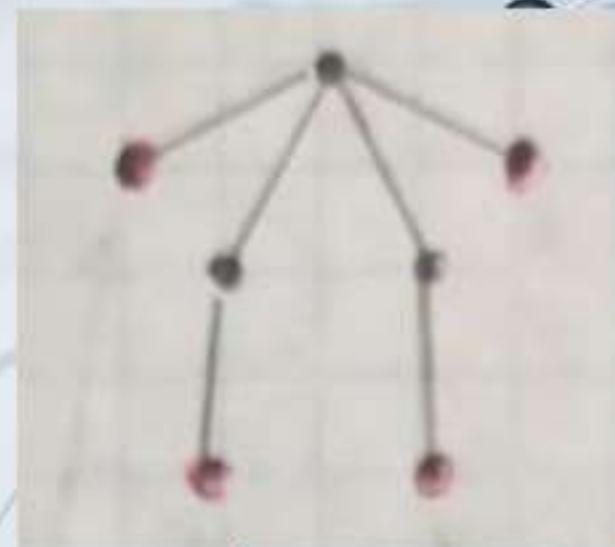
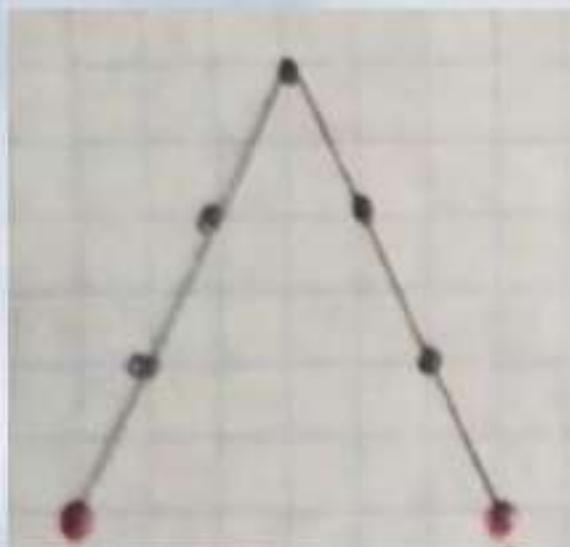
Задание 2

Нарисуйте в тетради какое-нибудь дерево, в котором 7 вершин, причём степень 1 имеют ровно:

а) 2 вершины;

б) 4 вершины;

в) 6 вершин.



Задание 3

В дереве 100 вершин. Какое в нём может быть:

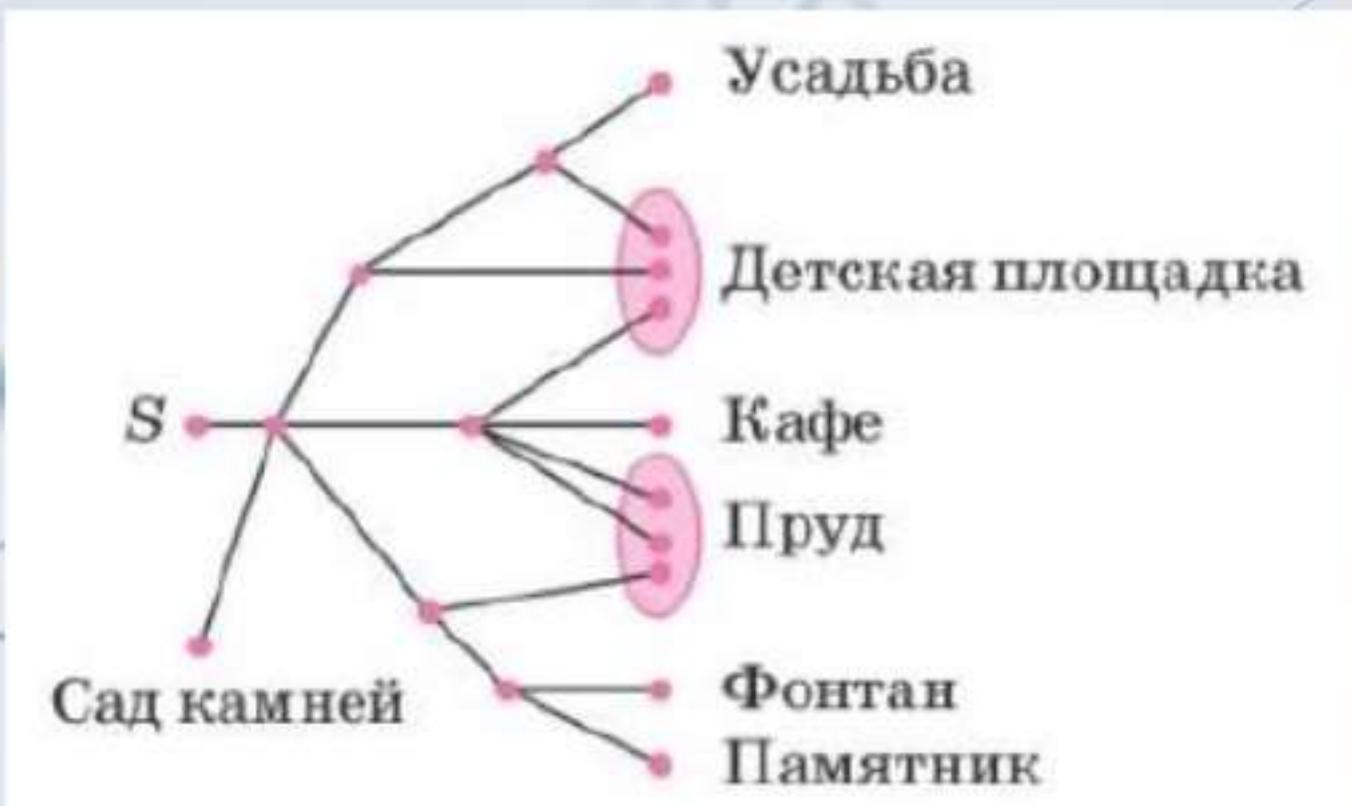
- а) наибольшее число концевых вершин;
- б) наименьшее число концевых вершин?



Задание 4

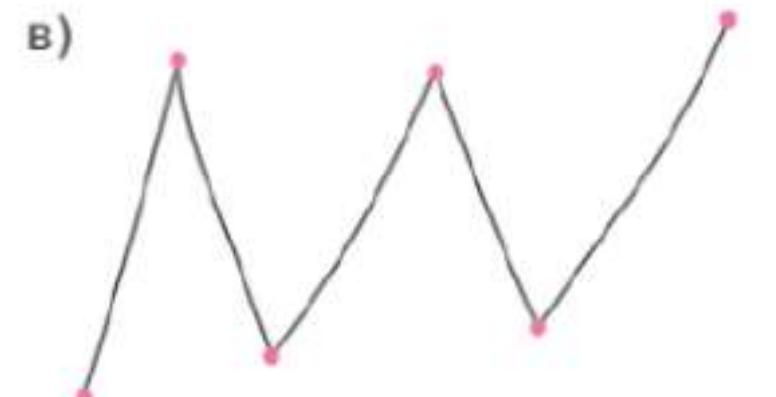
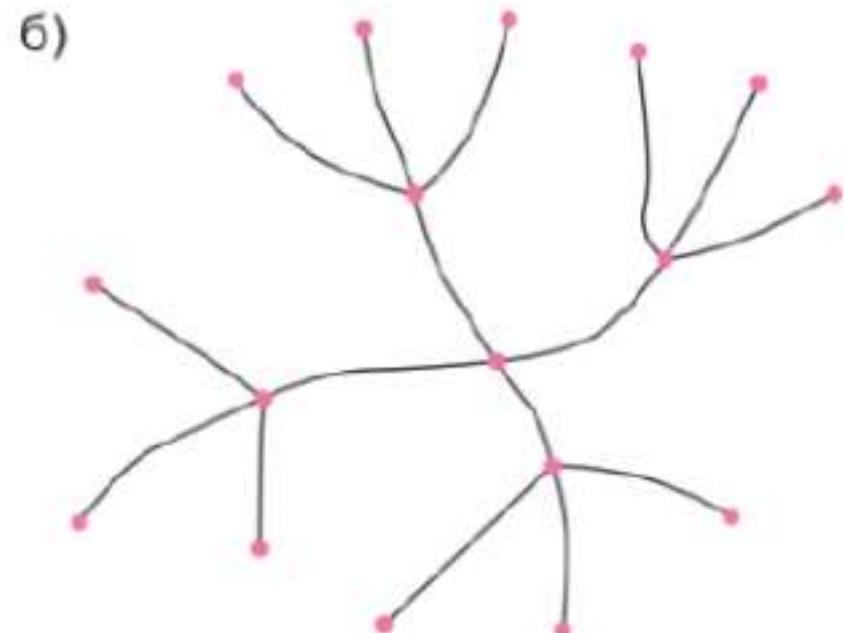
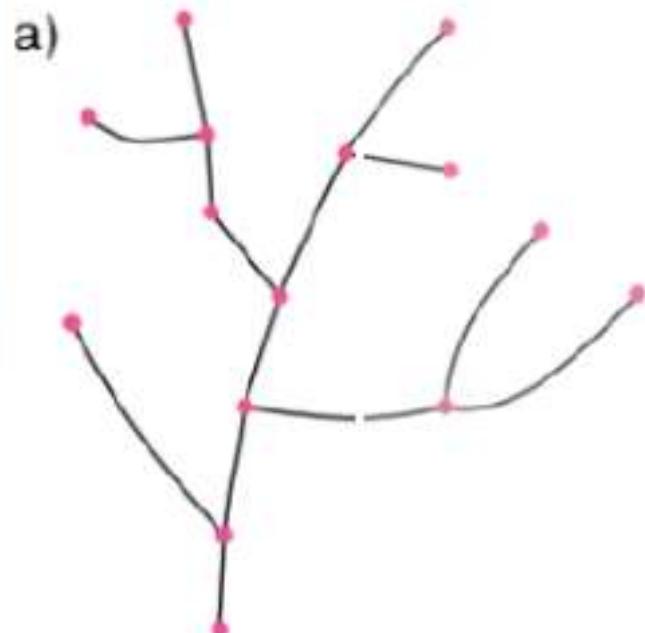
План тропинок в парке представляет собой дерево. Ворота обозначены вершиной S . Сколько цепей ведет из вершины S к:

- А) усадьбе;
- Б) детской площадке;
- В) кафе;
- Г) пруду;
- Д) фонтану;
- Е) памятнику;
- Ж) саду камней.



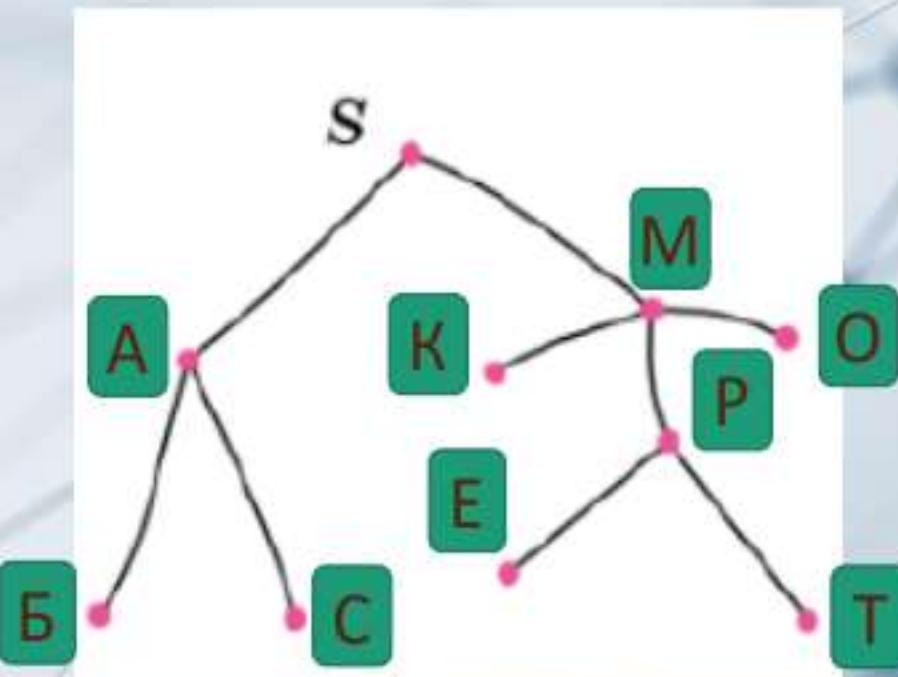
Задание 5

Сколько концевых вершин на дереве?



Задание 6

На рисунке показано дерево. Рассмотрите цепи, соединяющие начальную вершину S с концевыми. Сколько таких цепей имеют длину 2; длину 3; длину 4?



Задание 7

Сколько вершин в дереве, в котором:

а) 14 рёбер;

б) 27 рёбер;

в) 31 ребро

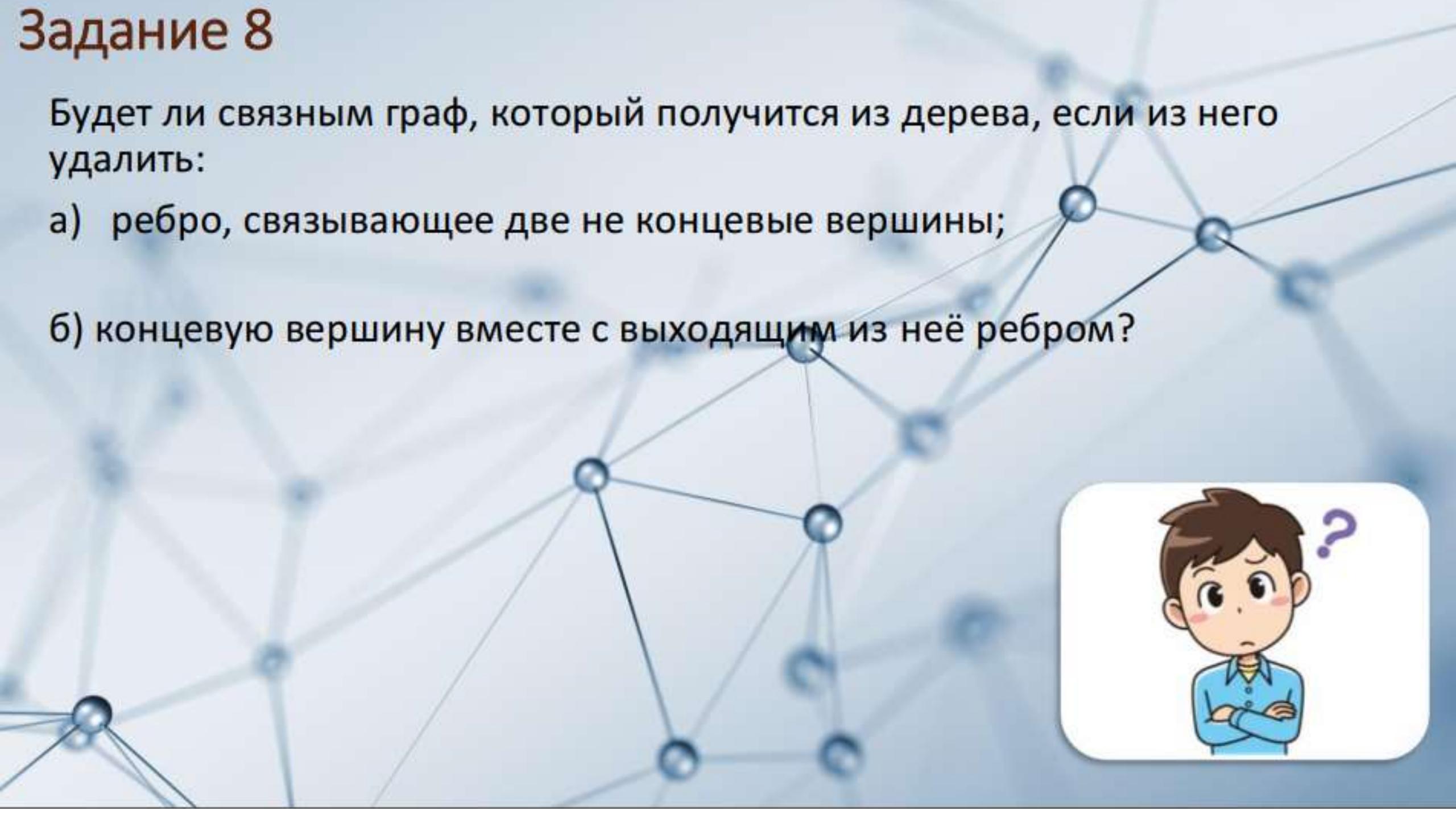


Задание 8

Будет ли связным граф, который получится из дерева, если из него удалить:

а) ребро, связывающее две не концевые вершины;

б) концевую вершину вместе с выходящим из неё ребром?



Использованные источники:

<https://www.yaklass.ru/p/veroyatnost-i-statistika/7-klass/teoriya-grafov-7271003/tsepi-i-tcikl-puti-v-grafe-7276192/re-3ae2a5c5-5835-4b64-a9e1-e24e8be59997>

<https://www.yaklass.ru/p/veroyatnost-i-statistika/8-klass/vvedenie-v-teoriyu-grafov-7310238/derevo-svoistva-dereva-7303500/re-7b216e40-0fc0-4ead-b9ea-22e0c0017ad8>

Спасибо за внимание