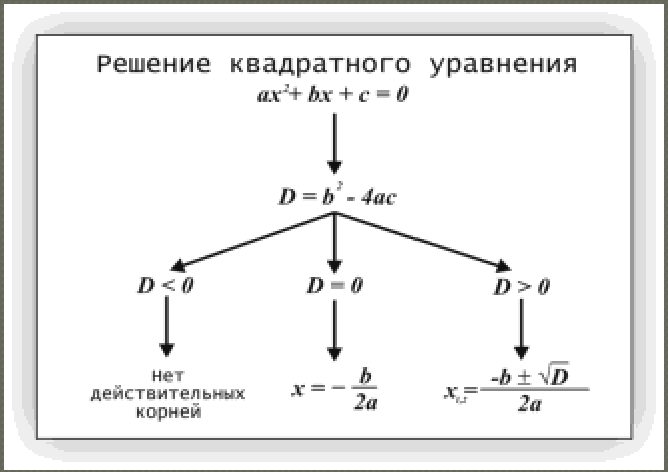
Задание 6 профильного ЕГЭ по математике

Поваляева Анастасия
Дмитриевна
11 класс

Линейные, квадратные и кубические уравнения

Определение. Линейным уравнением называется уравнение вида $ax = b$.
► *Пример*.
$-3,5x = 105$
X=-30
Определение. Квадратным уравнением называется уравнение вида:
$ax^2 + bx + c = 0$
При этом коэффициент a/= 0, так как иначе уравнение сведется к линейному.
Определение. Количество решений квадратного уравнения определяет выражение,
которое называется дискриминантом квадратного уравнения:



Пример решения квадратного уравнения:

$$3x^2 - 18x + 27 = 0$$

$$a = 3 \quad b = -18 \quad c = 27$$

$$D = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27 = 324 - 324 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-18) + \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-18) - \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$$

Определение. Квадратные уравнения, у которых коэффициент b равен 0 или
коэффициент c равен 0, называются неполными.

Как решать неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$?

Шаг 1: Вынести общий множитель x за скобки.

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0.$$

Шаг 2: Каждый из множителей приравнять к нулю.

$$x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0, \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$$

Как решать неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$?

Шаг 1: Перенести коэффициент c в правую часть с противоположным знаком и обе части уравнения поделить на a.

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Шаг 2: Если правая часть отрицательна, то решений нет. Если правая часть неотрицательна, то корни вычисляются следующим образом:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Определение. Кубическим уравнением называется уравнение вида $f3(x) = a$

▶ Пример.

$(x + 2)3 = 27$

Шаг 1: Извлечем корень третьей степени из обеих частей уравнения. Он извлекается из любых чисел, в отличие от квадратного корня, поэтому никакие ограничения нам не нужны.

$(x + 2)3 = 27 \Leftrightarrow x + 2 = 3.$

Шаг 2: Решим получившееся линейное уравнение:

$x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1.$

Формулы сокращённого умножения

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	- квадрат суммы
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	- квадрат разности
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	- разность квадратов
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$	- куб суммы
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$	- куб разности
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	- сумма кубов
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	- разность кубов

Рациональные уравнения

Определение. Рациональным уравнением называется уравнение вида: $P(x)/Q(x) = 0$.

$P(x)$, $Q(x)$ являются многочленами.

Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, знаменатель нулю не равен. Поэтому для решения рационального уравнения мы будем использовать следующий равносильный переход:

$P(x)/Q(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0, Q(x) \neq 0.$

Решить уравнение $\frac{3x}{x-2} + \frac{6}{2-x} = x$

Решение:

Общий знаменатель равен $x - 2$.

Умножив обе части на общий знаменатель, получим

$$3x - 6 = x(x-2),$$
$$3x - 6 = x^2 - 2x.$$

Отсюда

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

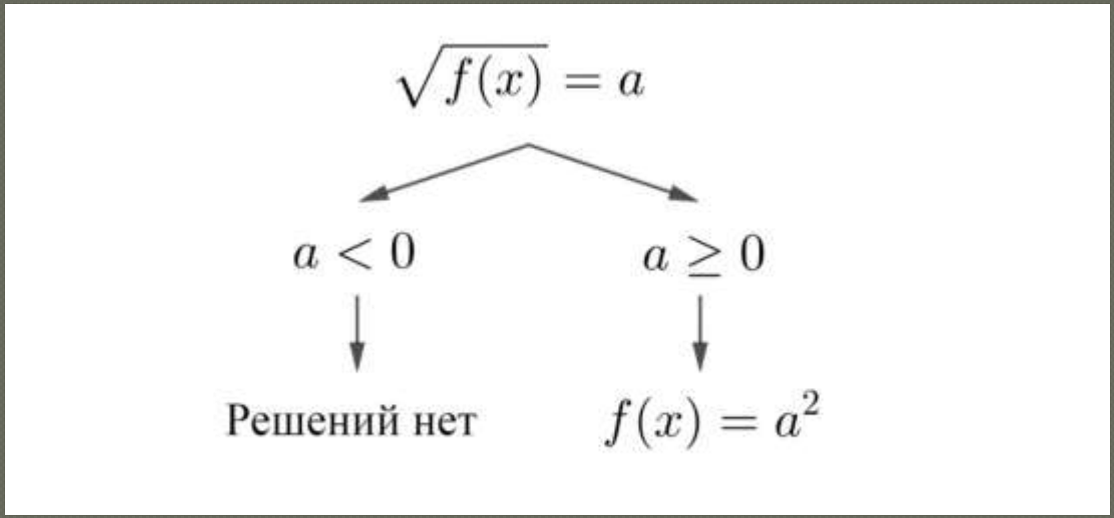
При $x = 2$, $x - 2 = 0$.

При $x = 3$, $x - 2 \neq 0$.

Ответ: 3.

Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение вида
$\sqrt{f(x)} = a$
Если правая часть отрицательная, то уравнение решений не имеет. Если правая
часть неотрицательная, то для решения уравнения мы возводим обе части уравнения
в квадрат, избавляясь от иррациональности.



▸ **Пример 1.**

Уравнение $\sqrt{2x^2 + 3x} = -1$ не имеет решений, поскольку правая часть уравнения отрицательная.

▸ **Пример 2.**

Уравнение $\sqrt{2x + 5} = 3$ имеет решения, поскольку правая часть уравнения положительная. Для его решения возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{2x + 5} = 3 \Leftrightarrow 2x + 5 = 9 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Иррациональное уравнение вида
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$
Основная идея решения:
Для решения уравнений данного типа мы возводим в квадрат обе части.
Важно!!! Необходимо учесть ограничения на подкоренные выражения.
Замечание:
Ограничения достаточно поставить только на одну из частей уравнения. Происходит это потому, что после возведения в квадрат у нас подкоренные выражения приравниваются ($f(x) = g(x)$). Если одно из них было неотрицательным, то поскольку они равны, второе тоже будет автоматически неотрицательным.

▶ **Пример.**

$$\sqrt{5x-3} = \sqrt{x+2}.$$

Шаг 1: Возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от корней. Не забудем ограничения: здесь удобнее их ставить на подкоренное выражение в правой части уравнения ($x + 2 \geq 0$).

$$\sqrt{5x-3} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 = x + 2, \\ x + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Шаг 2: Решим получившееся уравнение с учетом ограничений.

$$\begin{cases} 5x - 3 = x + 2, \\ x + 2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 5, \\ x \geq -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1{,}25, \\ x \geq -2. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1{,}25.$$

Выводы: Найденный корень $x = 1{,}25$ удовлетворяет условию, полученному из ограничений ($x \geq -2$). Значит он является корнем исходного уравнения.

Иррациональное уравнение вида
$\sqrt{f(x)} = g(x)$
Основная идея решения:
Как и в предыдущих двух типах иррациональных уравнений, мы будем возводить в квадрат обе части. Важно понимать, что это не является равносильным переходом и нам нужно будет это учитывать.
Почему переход не является равносильным?
Рассмотрим неверное равенство: $\sqrt{9} = -3$
Теперь возведем обе части уравнения в квадрат. $9 = 9$
Мы видим, что равенство стало верным. Переход не является равносильным.
Как так получилось?
Левая и правая части исходного равенства равны по модулю, но противоположны по знаку. После возведения в квадрат пропадает различие в знаках и равенство становится верным.
У нас есть два пути, что с этим делать.
Способ 1: Использование равносильного перехода
Суть: Хотим учесть ограничения сразу, чтобы переход от исходного уравнения был равносильным.
Важно!!! После возведения в квадрат обеих частей уравнения надо ставить ограничения именно на правую часть уравнения.
$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g2(x), g(x) \geq 0.$

Решим уравнение: $\sqrt{x-2} = x-8$

$$\begin{cases} x-2 = (x-8)^2 \\ x-8 \geq 0 \end{cases}$$

$x^2 - 17x + 66 = 0$ $\quad$ $x \geq 8$

$x_1 = 6$ и $x_2 = 11$

$x = 6$ – посторонниий корень

Ответ: 11

Показательные уравнения

Определение. Выражение вида a b называется степенью. При этом, число a называется основанием степени, а число b - показателем степени.

▶ *Пример.* 7 x+1 Число 7 является основанием степени, выражение x + 1 - показателем степени.

Определение. Уравнение, в котором есть выражение с переменной в показателе степени, называется показательным.

Свойства степени.

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $a^n : a^m = a^{n-m}$

3) $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Логарифмические уравнения

Определение. Логарифмом числа b по основанию a называется такое число c, что выполняется равенство:
$ac = b$.
Запись log$a$ $b = c$ означает: $ac = b$.

Пример:

Решить уравнение $x^{\log_3 x} = 81$.

Решение:

$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$

$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow \log_3^2 x$

$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4$

$x^{\log_3 x} = 81 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 4$

$\log_3 x = -2$ $\quad\quad$ $\log_3 x = 2$

$x = 3^{-2} = \frac{1}{9} > 0$ $\quad\quad$ $x = 3^2 = 9 > 0$

Ответ: $\frac{1}{9}$; 9.

Ограничение на логарифмы

Выражение log$a$ b имеет смысл, только если:
1) a > 0; 2) a/= 1; 3) b > 0.
Почему такие ограничения?
1) Возводить в произвольную степень мы можем только положительные числа.
Поэтому основание логарифма a положительно: a > 0.
2) Если a = 1, то выражение теряет смысл, так как 1 в любой степени равно 1.
Например, log1 2 - это степень в которую нужно возвести 1, чтобы получить 2. Такой
степени не существует. Поэтому логарифмы по основанию 1 не рассматриваются.
3) Так как из нашего определения b – это результат возведения положительного
числа a в степень c (b = ac), то этот результат может быть только положительным.
Поэтому b > 0.

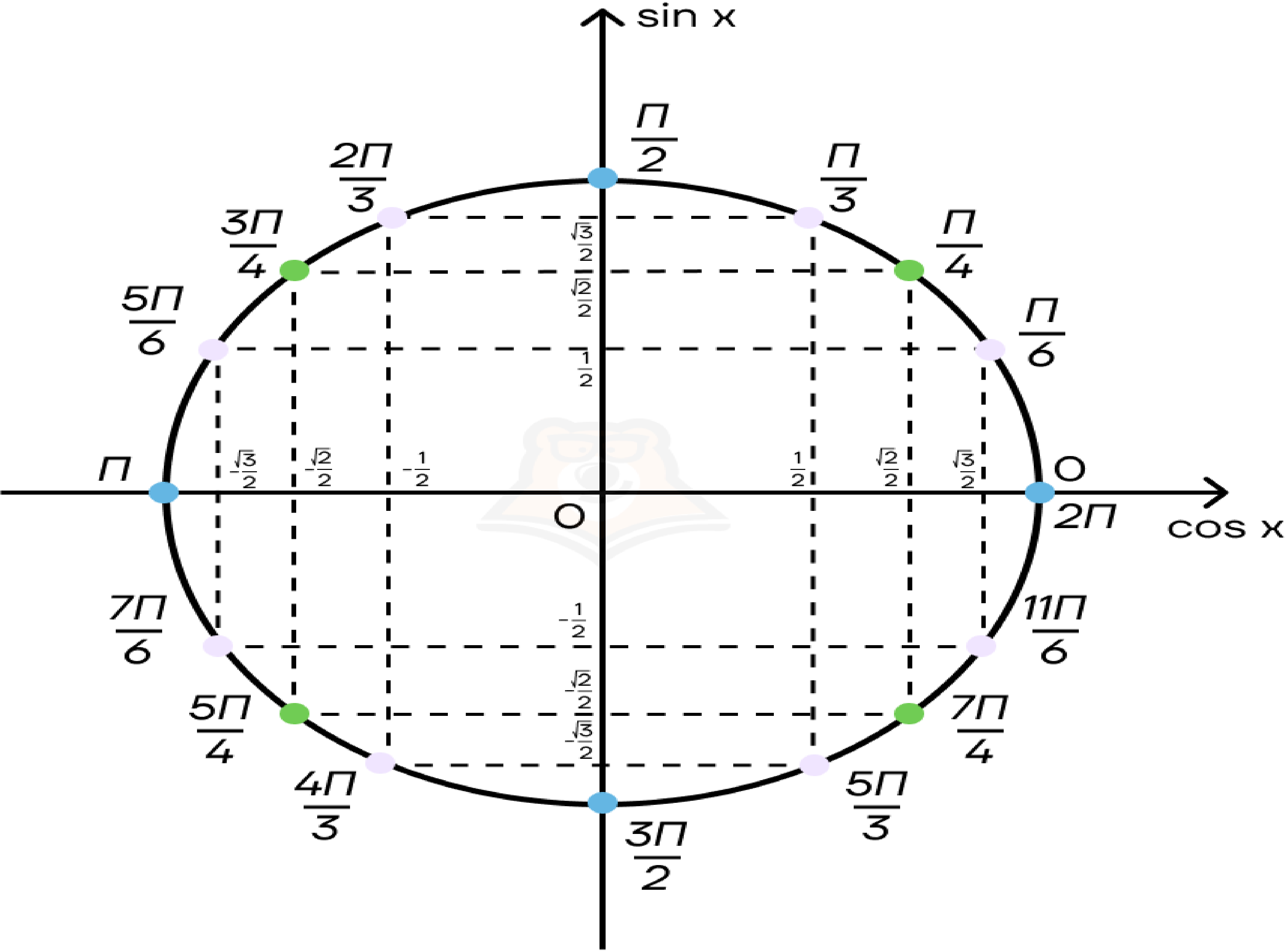
Основные свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0;$
2. $\log_a a = 1;$
3. $\log_a \frac{1}{a} = -1;$
4. $\log_{a^k} a = \frac{1}{k};$
5. $\log_a a^m = m;$
6. $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k};$
7. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c;$
8. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$
9. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b;$
10. $\log_a b^m = m \log_a b;$
11. $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_a b;$
12. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$
13. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$
14. $\log_a b \cdot \log_c d =$

    $= \log_c b \cdot \log_a d$
15. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Тригонометрические уравнение

- Для решения простейших тригонометрических уравнений нам понадобится тригонометрическая окружность. Она представлена ниже на рисунке.


sin x
cos x
П/2
2П/3
П/3
3П/4
П/4
5П/6
П/6
П
O
2П
O
7П/6
11П/6
5П/4
7П/4
4П/3
5П/3
3П/2
√3/2
√2/2
1/2
-1/2
-√2/2
-√3/2
-√3/2
-√2/2
-1/2
1/2
√2/2
√3/2

Простейшие тригонометрические уравнения

1. $\cos(x) = a$

$-1 \le \cos x \le 1$

$-1 \le a \le 1$

$$\cos x = a \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos(a) + 2\pi k,\ k \in Z,\ \text{при } |a| \le 1 \\ x \in \varnothing,\ \text{при } |a| > 1 \end{array} \right.$$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\quad k \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$