Задание номер 7

Профильная математика

Выполнила Громова Милана

Ученица 11 класса МОУ СОШ 2

Преобразование выражений

Задание №7 «Преобразование выражений» в ЕГЭ по математике профильного уровня проверяет умение выполнять **вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами**, а также **преобразования дробно-рациональных выражений**.

ЧТО НЕОБХОДИМО ЗНАТЬ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ :

1. Уметь пользоваться формулами сокращённого умножения
2. Знать основные свойства степеней
3. Уметь преобразовать числовое или буквенное выражение
4. Свойства логарифмических функций
5. Свойства тригонометрических функций

Виды выражений , встречающихся в задании

- Рациональные
- Иррациональные
- Степенные
- Тригонометрические
- Логарифмические

Рациональные выражения

Для преобразования числовых и буквенных рациональных выражений необходимо знать: правила действий с обыкновенными и десятичными дробями

1. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(x-4+\frac{16}{x+4}\right)\cdot\frac{5x+20}{x^2}$;

б) $(x^2-25)\cdot\left(\frac{2x}{25-x^2}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x+5}\right)$.

2. Выполните действия:

а) $\left(\frac{4x-3y}{4x+3y}-\frac{4x+3y}{4x-3y}\right):\frac{12xy}{9y^2-16x^2}$; б) $\frac{\frac{1}{xy}+\frac{2}{y}-\frac{3}{x}}{1+2x-3y}:\frac{x^2}{y}$.

3*. Выполните действия:

$$\left(\frac{x+3}{x^2-8x+16}-\frac{x-3}{x^2-16}\right):\left(\frac{x+3}{x^2-16}-\frac{x-3}{x^2+8x+16}\right).$$

Запоминаем:

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

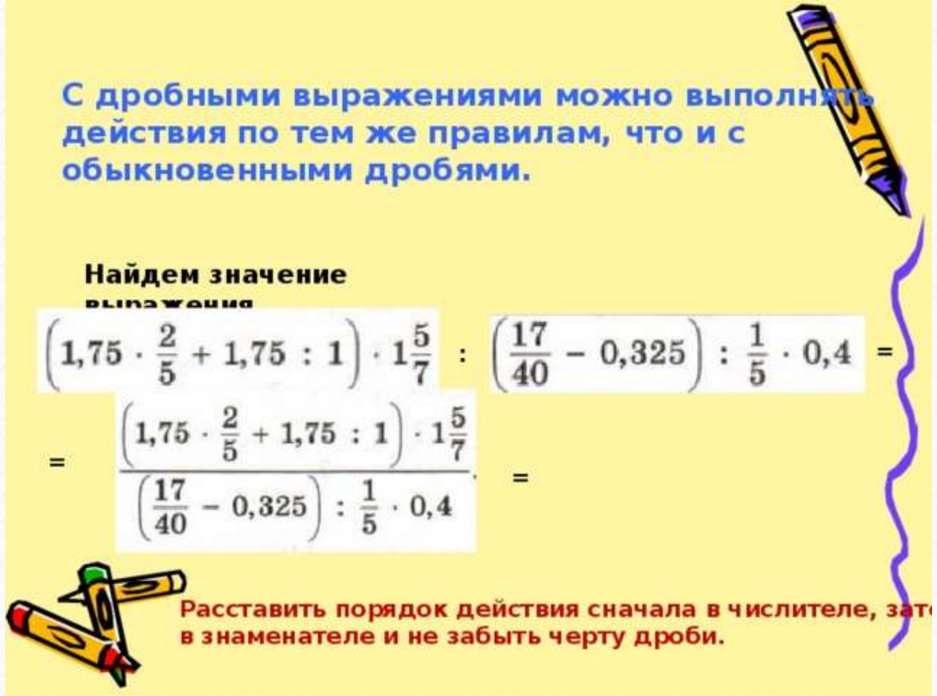
by @sashoshamath

- Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- Куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3ba^2 + b^3$
- Куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3ba^2 - b^3$

Основное свойство пропорции

Если $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, то $A \cdot D = B \cdot C$

Примеры решения



Иррациональные выражения

это алгебраические выражения, содержащие **один или несколько корней**. Корень может быть квадратным, кубическим или любым другим.

Тождественные преобразования выражений с арифметическим корнем натуральной степени:
примеры заданий из Открытого Банка Задач
Единого Государственного Экзамена
по математике.

$$\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}=\frac{\sqrt[18]{7^2}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[18]{7^3}}=\frac{\sqrt[18]{7^3}}{\sqrt[18]{7^3}}=1$$

$$\sqrt{548^2-420^2}=\sqrt{(548-420)\cdot(548+420)}=\sqrt{128\cdot 968}=\sqrt{64\cdot 2\cdot 484\cdot 2}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{484}\cdot\sqrt{4}=$$
$$=8\cdot 22\cdot 2=352$$

$$5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}=5\cdot\sqrt[6]{9^2}\cdot\sqrt[6]{9}=5\cdot\sqrt[6]{9^3}=5\cdot\sqrt[6]{(3^2)^3}=5\cdot\sqrt[6]{3^6}=5\cdot 3=15$$

Сейчас не удается отобразить рисунок.

$$\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2},\ если\ 6\le a\le 10.$$

$$\sqrt{(a-6)^2}=|a-6|=a-6;\ \sqrt{(a-10)^2}=|a-10|=10-a,\ то$$

$$\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2}=(a-6)+(10-a)=a-6+10-a=4$$

Нужно знать!

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и m, больших 1 и любых неотрицательных a и b верны равенства:

1. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
2. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$
3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$
5. $(\sqrt[n]{a}\,)^m = \sqrt[n]{a^m}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
7. $(\sqrt[n]{a})^n = a \ (a \geq 0)$
8. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases}$
9. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$
10. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$
11. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0)$

Пример решения:

Тригонометрические выражения

это выражения с тригонометрическими функциями, которые помогают представить угол в числовом виде. Такие выражения могут содержать синус, косинус, тангенс и котангенс, а также их обратные — arcsin, arccos, arctg и arcctg

Нужно знать!

Формулы приведения

угол / функция	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi \pm \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$

Тригонометрические формулы таблица - шпаргалка №1

Основные тригонометрические тождества

Это математические выражения для тригонометрических функций, выполняемые при каждом значении аргумента.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\alpha \div \cos\alpha$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \cos\alpha \div \sin\alpha$$
$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = 1 \div \cos^2\alpha$$
$$1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = 1 \div \sin^2\alpha$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta) \div (1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta)$$
$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = (\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta) \div (1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta)$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = (\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta + 1) \div (\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha)$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = (\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta - 1) \div (\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\alpha)$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = (2\mathrm{tg}\,\alpha) \div (1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha)$$
$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = (\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1) \div (2\mathrm{ctg}\,\alpha)$$

qpotok.ru-математика

Как решаем:

1. Замена переменной и сведение к квадратному

3

$2\cos^2 x + 5\sin x = 5$

Решение:

$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x = 5$

$2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$

$\sin x = t$

$2t^2 - 5t + 3 = 0$

$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = 1$

$\sin x = \frac{3}{2}$ - не имеет решения, т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Действия со степенями

это выражения, в которых число (основание) возводится в степень. Степень обозначается символом «^» и указанием показателя степени, который обозначает количество умножений. Например, выражение вида **a^n**, где a — основание, n — показатель степени, означает, что число a умножается на само себя n раз: a × a × a × ... × a (n раз).

Свойства степени

$a^0 = 1, a^1 = a$	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$	$(\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a^2} = a$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Как решаем:

2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$2^x = 16$$
$$2^x = 2^4$$
$$x = 4$$

$$4^x = 2$$
$$2^{2x} = 2^1$$
$$2x = 1$$
$$x = 0{,}5$$

$$2^x = \frac{1}{2}$$
$$2^x = 2^{-1}$$
$$x = -1$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = 2$$
$$16^{-x} = 2$$
$$2^{-4x} = 2^1$$
$$-4x = 1$$
$$x = -\frac{1}{4}$$

1) $$5^{x-7} = \frac{1}{125}$$
$$5^{x-7} = 125^{-1}$$
$$5^{x-7} = 5^{-3}$$
$$x - 7 = -3$$
$$x = 4$$

2) $$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$x - 8 = 2$$
$$x = 10$$

Логарифмические выражения

это показатель степени, в которую нужно возвести одно число (основание), чтобы получить другое число.

7 Найдите значение выражения $5^{\log_{25} 64}$.

8 Найдите значение выражения $38\log_{25}\sqrt{5}$.

9 Найдите значение выражения $\frac{7}{3^{\log_3 8}}$.

10 Найдите значение выражения $9\log_4 \sqrt[9]{4}$.

11 Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[7]{11}} 11$.

12 Найдите значение выражения $16^{\log_4 7}$.

13 Найдите значение выражения $3^{\log_{27}125}$.

1 Найдите значение выражения $\log_8 112-\log_8 1{,}75$.

Нужно знать:

1. $\log_a 1 = 0;$
2. $\log_a a = 1;$
3. $\log_a \frac{1}{a} = -1;$
4. $\log_{a^k} a = \frac{1}{k};$
5. $\log_a a^m = m;$
6. $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k};$
7. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c;$
8. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$
9. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b;$
10. $\log_a b^m = m \log_a b$
11. $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_a b$
12. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$
13. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$
14. $\log_a b \cdot \log_c d =$

    $= \log_c b \cdot \log_a d$
15. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Пример решения:

Найдите значение выражения $\frac{7^{\log_3 18}}{7^{\log_3 2}}$.

Решение.

$$\frac{7^{\log_3 18}}{7^{\log_3 2}} = 7^{\log_3 18 - \log_3 2} = 7^{\log_3 (18:2)} = 7^{\log_3 9} = 7^2 = 49.$$

Ответ: 49.

46. Найдите значение выражения $(1 - \log_3 15)(1 - \log_5 15)$.

Решение.

$$(1 - \log_3 15)(1 - \log_5 15) = (\log_3 3 - \log_3 15)(\log_5 5 - \log_5 15) =$$

$$= \left(\log_3 \frac{3}{15}\right)\left(\log_5 \frac{5}{15}\right) = \left(\log_3 \frac{1}{5}\right)\left(\log_5 \frac{1}{3}\right) =$$

$$= (-\log_3 5)(-\log_5 3) = \frac{1}{\log_5 3} \cdot \log_5 3 = 1.$$

Ответ: 1.