СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Автор:
Егорова П.А.

Содержание

Введение

Зарождение тригонометрии относится к глубокой древности. Еще задолго до новой эры вавилонские ученые умели предсказывать солнечные и лунные затмения. Это позволяет сделать вывод о том, что им были известны некоторые простейшие сведения из тригонометрии. Постепенно в геометрии и астрономии установились понятия синуса, косинуса, тангенса угла.

Одним из основоположников тригонометрии считается древнегреческий астроном Гиппарх, живший во II в. до н. э. Он написал первые тригонометрические таблицы. Эти таблицы до нас не дошли, но они вошли в сочинения "великое построение" (Альмагест) знаменитого александрийского астронома Клавдия Птолемея жившего во второй половине II в. до н. э.

Эти таблицы являются таблицами значений удвоенного синуса половины соответствующего центрального угла. В них были даны значения хорд для всех углов (через каждые полградуса) от 0° до 180°. Однако надо иметь в виду, что в древней Греции тригонометрия не выделялась в самостоятельную науку, а считалась частью астрономии.

Большой вклад в развитие тригонометрии внесли индийские математики. Они стали вычислять не полную хорду, как это делали греки, а ее половину (то есть "линию синусов"). Линия синусов именовалась ими "архаджива", что буквально означало “половина тетивы лука”. Индийцы составили таблицу синусов, в которой были даны значения полухорд, измеренных частями (минутами) окружности для всех углов от 0° до 90°. Эти таблицы были точнее таблиц Птолемея.

В XI-XIII вв. в трудах математиков Средней Азии, Закавказья, Ближнего Востока и Индии началось формирование тригонометрии как отдельной науки. Особенно усиленно тригонометрия развивалась в средние века, в первую очередь на юго-востоке: в Индии, в Узбекистане, Азербайджане и Таджикистане, в Арабии. Большая заслуга в формировании тригонометрии как отдельной науки принадлежит азербайджанскому ученому Насир ад-Дину ат-Туси (1201-1274), написавшему "Трактат о полном четырехугольнике". Работы ученых этого периода привели к выделению тригонометрии как нового самостоятельного раздела математики. Однако в их трудах еще не было необходимой символики, и поэтому развитие тригонометрии происходило медленно.

С XV в. и в Европе появляются работы, посвященные вопросам тригонометрии. Немецкий ученый Иоганн Мюллер (1436-1476 гг.), известный в науке под именем Региомонтан, издал труд "Пять книг о треугольниках всех видов", сыгравший важную роль в развитии тригонометрии, которая систематически излагается как самостоятельная научная дисциплина. В 1696 г. появился труд Барртоломеуса Питискуса "Тригонометрия, или Краткий обзорный трактат о решении треугольников ".

В XV-XVII в. в Европе было составлено и издано несколько тригонометрических таблиц. Над их составлением работали крупнейшие ученые: Н. Коперник (1473-1543), И. Кеплер (1571-1630), Ф. Виет (1540-1603) и др. В России первые тригонометрические таблицы были изданы в 1703 г. при участии Л.Ф. Магницкого.

Таким образом, тригонометрия возникла на геометрической основе, имела геометрический язык и применялась к решению геометрических задач. Развитие алгебраической символики позволило записывать тригонометрические соотношения в виде формул; применение отрицательных чисел позволило рассматривать направленные углы и дуги и распространить понятие тригонометрических линий (определенных отрезков в круге) для любых углов. В этот период создалась база для изучения тригонометрических функций как функций числового аргумента, основа аналитической теории тригонометрических (круговых) функций.

Современный вид тригонометрия получила в трудах великого ученого, члена Российской академии наук Л. Эйлера (1707-1783). Эйлер стал рассматривать значения тригонометрических функций как числа – величины тригонометрических линий в круге, радиус которого принят за единицу ("тригонометрический круг" или "единичная окружность"). Эйлер дал окончательное решение о знаках тригонометрических функций в разных четвертях, вывел все тригонометрические формулы из нескольких основных, установил несколько неизвестных до него формул, ввел единообразные обозначения. Именно в его трудах впервые встречаются записи sin α, cos α, tg α, ctg α. На основании работ Л. Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие ее в строгой научной последовательности.

Аналитическое (не зависящее от геометрии) построение теории тригонометрических функций, начатое Эйлером, получило завершение в трудах великого русского ученого Н.И. Лобачевского.

В XVIII в., и особенно в XIX в., в связи с бурным развитием дифференциального исчисления возникает новый предмет – математический анализ, и тригонометрия становится его составной частью. А учебный предмет «Тригонометрия» с его первоначальной геометрической основой продолжает существовать самостоятельно. То есть возникают два направления учебного предмета тригонометрии: аналитическое решение треугольников и изучение свойств круговых (тригонометрических) функций.

В 1848 г. академик М.В. Остроградский предложил систему индуктивного изучения тригонометрии:

а) сначала (в средних классах) изучается тригонометрия острого угла как учение о вычислительных приемах решения треугольников и фигур, сводимых к ним;

б) затем (в старших классах) обобщаются понятия тригонометрии острого угла, то есть излагаются основы теории тригонометрических функций любого действительного аргумента.

С тех пор эта система успешно применялась в отечественной методике обучения тригонометрии в школе.

Тема способы решения тригонометрических уравнений актуальна в настоящее время. Так как она включена в школьную программу и встречается в заданиях из ЕГЭ.

Цели: изучить различные подходы к изучению тригонометрических уравнений в школьных учебниках различных авторов, выяснить их сходства и различия, достоинства и недостатки, разобрать способы решения тригонометрических уравнений из школьных учебников 10-11 классов, рассмотреть тригонометрические уравнения из ЕГЭ.

Задачи: провести анализ учебников 10-11 классов по разделу тригонометрия; разобрать различные и сходные примеры, приведённые в учебниках; прорешать задачи по каждому из учебников, разобрать типы задач из ЕГЭ, связанные с решением тригонометрических уравнений и прорешать их.

1 Теоретический материал, изучаемый школьниками по теме «Тригонометрические уравнения»

Для того чтобы начать говорить о тригонометрических уравнениях, посмотрим, как авторы учебников подводят к этой теме, и из чего состоит структура тригонометрии по каждому из учебников. Проанализируем особенности материала по теме: «Тригонометрические уравнения». В таблице ниже представлены учебники, взятые для сравнения.

Таблица 1 - Обзор учебников

№	Авторы	Название	Школьные классы	Издательство	Год
1	Мордкович А. Г., Семёнов П. В.	«Алгебра и начала математического анализа»	10-11	Москва, Мнемозина	2013
2	Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Ивлев Б. М., Швацбурд С. И.	«Алгебра и начала анализа»	10-11	Москва, просвещение	2011
3	Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И.	«Алгебра и начала анализа»	10-11	Москва, Просвещение	2016

А.Г. Мордкович «Алгебра и начала математического анализа»

Основные разделы, которые ученики 10-11 класса изучают по теме «Тригонометрия» по учебнику А.Г. Мордковича «Алгебра и начала математического анализа»:

1.Тригонометрические функции. Изучение этой главы начинается со знакомства с числовой окружностью. В принципе, любую окружность можно принять за числовую, но удобнее использовать единичную окружность – окружность, радиус которой принимается за единицу измерения. В учебнике дается определение числовой окружности, ученики учатся находить на ней такие точки, как $\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; -\frac{3\pi}{2}$ 1; 2; 3; 4; 5; 6; -7 и т.д. Далее идет изучение числовой окружности на координатной плоскости. Затем автор дает определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса (если $M(t) = M(x;$ у), то $x = cos\,t, y = sin\,t;\ tg\ t = \frac{sin\,t}{cost},\ ctg\ t = \frac{cos\,t}{sint}$). Ученики получают важное равенство, связывающее $\sin t$ *и* $cos\,t$ $(sin^2 t + cos^2 t = 1)$, а также составляют таблицы значений для косинуса и синуса, тангенса, котангенса. Здесь же дети решают уравнения вида $\sin t = a, \cos t = a$. Следующий параграф - это формулы приведения, после чего вводится понятие функции $y = \sin x$, изучаются её свойства и график, рассматривается функция $y = \cos x$, её свойства и график. Вводится восьмое свойство функций это периодичность (первые семь - область определения, четность или нечетность, монотонность, ограниченность, наибольшее или наименьшее значения, непрерывность, область значений функций). Поскольку для любого x справедливы равенства $sin(x - 2\pi) = sin\,x = sin(x + 2\pi), cos(x - -2\pi) = cos\,x = cos(x + 2\pi)$, то функции $y = sin\,x$, у $= cos\,x$ являются периодическими, причем 2π служит периодом и той, и другой функции. Далее ученики изучают два новых преобразования графиков тригонометрических функций (сжатие и растяжение). После изучения графиков функций синус и косинус вводится понятие функции $y = tg\,x$, её свойства и график, изучается функция $y = ctg\,x$, её свойства и график, а далее ученики переходят к новой главе «Тригонометрические уравнения».

2.Изучение следующей главы (тригонометрические уравнения) начинается с определения арккосинуса и решения уравнений вида $cos\ t = a$. Если $|a| \leq 1$, то $arccos\ a = t \Leftrightarrow \begin{cases} cos\,t = a, \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$. Если $|a| \leq 1$, то уравнение $cos\ t = a$ имеет решения $t = \pm arccos\,a + 2\pi k, k \in Z$. Далее выводится теорема: Для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство $arccos\ a +$

$+arccos(-a) = \pi$. Но на практике полученное соотношение удобнее использовать в следующем виде:

$arccos\,(-a) = \pi - arccos\,a$, где $0 \le a \le 1$. Также в учебнике описывается определение арксинуса и решение уравнений вида $sin\,t = a$. Если $|a| \le 1$, то $arcsin\,a = t \Leftrightarrow \begin{cases} sin\,t = a, \\ \frac{\pi}{2} \le t \le -\frac{\pi}{2} \end{cases}$. Если $|a| \le 1$, то уравнение $sin\,t = a$ имеет две серии решений: $t = arcsin\,a + 2\pi k$ и $t = \pi - arcsin\,a + 2\pi k, k \in Z$. В учебнике представлена общая формула для решения уравнения

$\sin t = a$: $t = (-1)^n arcsina + \pi n, n \in Z$. Затем даются определения арктангенса и арккотангенса и решения уравнений вида $tg\,x = a$, $ctg\,x = a$.

$arctg\,a = x \Leftrightarrow \begin{cases} tg\,x = a, \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Уравнение $tg\,x = a$ имеет решения $x = arctg\,a + \pi k, k \in Z$, $arctg\,(-a)$=$-arcctg\,a$.

$arcctg\,a$= x $\Leftrightarrow \begin{cases} ctg\,x = a, \\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$. Уравнение $ctg\,x = a$ имеет решения

$x = arcctg\,a + \pi k, k \in Z$,$arcctg\,(-a)$ = $\pi - arcctg\,a$.

Ученики 10 класса начинают решать простейшие тригонометрические уравнения, т.е уравнения вида $\sin x = a, \cos x = a, tg\,x = a$, где а - действительное число. К простейшим относят и уравнения вида $sin(kx + m) = a, cos(kx + m) = a, tg(kx + m) = a$.

Пример 1.

а) Решить уравнение $sin2x = \frac{1}{2}$

Введем новую переменную $t = 2x$, откуда получаем:

$t = (-1)^n\, arcsin\frac{1}{2}$ $+\pi n$. Далее, $arcsin\frac{1}{2}$ = $\frac{\pi}{6}$, значит, $t = (-1)^n\, \frac{\pi}{6} +$ $+\pi n,\ n \in Z$.

Возвращаясь к переменной x, получаем: $2x = (-1)^n\, \frac{\pi}{6} + \pi n$. Осталось обе части этого равенства разделить почленно на 2: $x = (-1)^n\, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$,

$n \in Z$.

Заметим, что при наличии некоторого опыта можно не вводить промежуточную переменную $t = 2x$, а сразу переходить от уравнения

$sin2x = \frac{1}{2}$ к записи $2x = (-1)^n \ arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$.

б) Решить уравнение $\boldsymbol{cos\frac{2}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Для данного примера $\frac{2}{3}x = \pm arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n$. Вычислим

$arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Значит, $\frac{2}{3}x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, откуда находим, что $x = \pm\frac{9\pi}{8} + 3\pi n, n \in Z$.

в) Решить уравнение $tg\ (4x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$4x - \frac{\pi}{6} = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

Примеры, описанные выше, представляют собой простейшие тригонометрические уравнения. В более сложных случаях применяют метод введения новой переменной и метод разложения на множители. Метод введения новой переменной заключается в том, что мы тригонометрическую функцию меняем на переменную, и уже относительно этой переменной решаем уравнение. В методе разложения на множители, общий множитель выносим за скобки и получаем уравнение, в котором нужно каждый множитель приравнять к нулю и решить эти уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $\boldsymbol{2sin^2x - 5sin\,x + 2 = 0}$

Введем новую переменную $z = sin\,x$.

Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Первое уравнение не имеет корней, так как синус принимает значения только от -1 до 1, а из второго находим:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, \; n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Теперь поговорим о втором методе решения тригонометрических уравнений – методе разложения на множители.

Пример 3. Решить уравнение $\mathbf{2 sin\frac{x}{2} cos5x - cos5x = 0}$

Имеем: $cos5x\left(2sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$. Значит, приходим к совокупности уравнений

$$cos5x = 0; sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим: $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\; n \in Z;\; x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z$

Из второго уравнения находим: $\frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\; n \in Z; x = (-1)^n \frac{\pi}{3} +$ $+2\pi n, n \in Z$.

Далее автор вводит понятие однородных тригонометрических уравнений. Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени; уравнение вида $asin2\, x + +bsin\, x\, cos\, x + cos2x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени.

Рассмотрим уравнение $a \sin x + b \cos x = 0,$ где $a \neq 0, b \neq 0$. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$ (синус и косинус одного аргумента не могут одновременно равняться нулю в силу основного тригонометрического тождества, поэтому однородное уравнение можно делить на косинус), получим:

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x};$$

$$a\, tg\, x + b = 0.$$

$$tgx = -\frac{b}{a};$$

$$x = arctg\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n, n \in Z.$$

Уравнение $a\,sin\,mx + b\,cos\,mx = 0$ тоже называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени.

Пример 4. Решить уравнение $\boldsymbol{cos(2\pi - 2x) = cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}$.

Мы знаем, что $cos(-t) = cos\,t$, значит,

$$cos(2x - \frac{\pi}{2}) = cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

По формулам приведения имеем:

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos\ 2x; \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \sin\ 2x.$$

Это позволяет переписать заданное уравнение в более простом виде:

$$cos\,2x = sin\,2x, \text{ т.е. } sin\,2x - cos\,2x = 0$$

Разделим обе части уравнения почленно на $cos\,2x$:

$$tg\,2x - 1 = 0;$$

$$tg\,2x = 1;$$

$$2x = arctg\,1 + \pi n,\ n \in Z;$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Последняя тема в главе «Тригонометрические уравнения» - однородные тригонометрические уравнения второй степени, которые автор решает с помощью деления на $cos^2 x$, а далее решение сводится к квадратному уравнению с новой переменной. Если член $\sin^2 x$ не присутствует, то уравнение решается с помощью разложения на множители.

Пример 5. Решить уравнение $\boldsymbol{sin^2 x - 3\,sin\,x\,cos\,x + 2\,cos^2 x = 0}$

Разделив обе части уравнения почленно на $cos^2 x$, получим:

$$tg^2 x - 3\,tg\,x + 2 = 0,$$

Введем новую переменную $z = tg\,x$:

$$z^2 - 3z + 2 = 0;$$

$$z_1 = 1, z_2 = 2.$$

Значит, либо $tg\ x = 1$, либо $tg\ x = 2$. Из уравнения $tg\ x = 1$ находим:

$$x = \mathrm{arctg}\ 1 + \pi n,\ n \in Z, \text{т. е.}\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Из уравнения $tg\ x = 2$ получаем: $x = arctg\ 2 + \pi n$, $n \in Z$.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{3} sinx\ cosx + cos^2 x = 0$

Решим уравнение методом разложения на множители:

$$cos\ x(\sqrt{3} sinx + cos\ x) = 0;$$

$$cos\ x = 0 \text{ или } \sqrt{3} sinx + cos\ x = 0;$$

Из первого уравнения находим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Второе уравнение – однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Решим его с помощью почленного деления обеих частей уравнения на cos x:

$$\sqrt{3} sinx + cos\ x = 0;$$

$$\sqrt{3} tgx + 1 = 0;$$

$$tg\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

3. В главе преобразования тригонометрических выражений рассматриваются формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов, тангенса суммы и разности аргументов, формулы двойного аргумента, затем идут преобразования сумм тригонометрических функций в произведения, преобразование произведений тригонометрических функций в суммы. Все эти полученные знания ученики применяют при решении тригонометрических уравнений.

В главах «Производная», «Первообразная и интеграл», «Уравнения и неравенства», Системы уравнений и неравенств», отводимых на изучение в

11 классе, так же встречается тригонометрия. Ученики находят производные тригонометрических функций, их первообразные, а также интегрируют их. В главе «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств» учащиеся 11 класса, на основании тех знаний, что получили в 10 классе по тригонометрии, решают тригонометрические уравнения. Подробнее разберу это на примерах в главе «Практическая часть».

Ш.А. Алимов «Алгебра и начала математического анализа»

Основные разделы, которые ученики 10-11класса изучают по теме тригонометрия по учебнику Ш.А. Алимова «Алгебра и начала математического анализа»:

1. Тригонометрические формулы. Обучение начинается с изучения радианной меры угла, далее дети знакомятся с единичной окружностью и изучают поворот точки вокруг начала координат. После автор дает определения синуса, косинуса и тангенса угла, их знаки. Изучают зависимость между синусом и косинусом, тангенсом и котангенсом, тангенсом и косинусом, а также синус, косинус и тангенс углов а и –а. Проходят формулу сложения $\cos(a+\beta) = cosacos\beta - sinasin\beta$, $sin(a+$ $+\beta) = sinacos\beta — sin\beta cosa$), формулу двойного угла ($sin2a = 2\,sinacosa$, $cos2a = -cos^2a — sin2a$, $tg2a = \frac{2\,tga}{1-tg^2a}$), половинного угла. Решают уравнения $1 + cos2x = 2cosx$, сводящееся к двум уравнениям вида $cosx = a$. Далее проходят формулы приведения, сумму и разность синусов и косинусов. После на основании полученных знаний переходят к новой главе «Тригонометрические уравнения».

2.Тригонометрические уравнения. Данная глава начинается с изучения уравнения вида $cos\,x = a$ и определения арккосинуса. Все корни уравнения, где $|a| \le 1$ можно находить по формуле $x = \pm arccos\,a + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 1. Решить уравнение $\boldsymbol{cos2x = -\frac{1}{2}}$

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Затем идет уравнение $\sin x = a$ и определение арксинуса, уравнение $tgx = a$ и определение арктангенса. Корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leq 1$, выражаются формулой $x = (-1)^n arcsina + \pi n, n \in Z$. Корни уравнения $tg\ x = a$, где $a \in R$, выражаются формулой $x = arctg\ a + \pi n, n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\boldsymbol{sin2x = -\frac{1}{2}}$

$$2x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in Z,$$

$$2x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z,$$

$$x = (-1)^{n+1}\ + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Пример 3. Решить уравнение $\boldsymbol{tg\ x = 2}$.

$$x = arctg\ 2 + \pi n, n \in Z,$$

$$arctg\ 2 \approx 1{,}11.$$

От простых тригонометрических уравнений автор переходит к трем видам уравнений:

1)Уравнения, сводящиеся к квадратным:

Пример 4. Решить уравнение 2 $\boldsymbol{cos^2x - 5sinx + 1 = 0}$.

Заменяя cos^2x на 1 - sin^2x, получаем

$$2(1 - sin^2x) - 5sinx + 1 = 0, \text{ или}$$

$$2sin^2x - 5sinx - 3 = 0,$$

Обозначая $sinx = y$, получаем $2y^2 + 5y - 3 = 0$, откуда

$$y_1 = -3, y_2 = \frac{1}{2}.$$

1)$sinx = -3$ уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$;

2)$sinx = \frac{1}{2}$,

$$x = (-1)^n arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

2) Уравнения $a\, sinx + b \cos x = 0$:

Пример 5. Решить уравнение $\boldsymbol{2sinx - 3cosx = 0}$.

Поделив уравнение на cosx, получим $2tgx - 3 = 0$,

$$tgx = \frac{3}{2},$$

$$x = arctg\frac{3}{2} + \pi n, n \in Z.$$

sinx и cosx не могут одновременно равняться нулю, т.к они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, следовательно, при делении уравнения $asin\, x + b\cos x = 0,$ где $a \neq 0, b \neq 0,$ на $cosx$, получаем уравнение, равносильное данному.

3) Уравнения, решаемые разложением левой части на множители. В этой же главе автор предлагает познакомиться с простейшими тригонометрическими неравенствами и переходит к следующей главе «Тригонометрические функции».

Пример 6. Решить уравнение $\boldsymbol{sin2x - sinx = 0}$.

Используя формулу синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде $2sinx\, cosx - sinx = 0$. Вынося общий множитель sinx за скобки, получаем $sinx\,(2cosx - 1) = 0$.

1. $sinx = 0$,

$$x = \pi n, n \in Z;$$

2. $2cosx - 1 = 0$,

$$cosx = \frac{1}{2};$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

В учебнике Алимова автор приводит в пример решение системы уравнений, как дополнительный материал. На практике отработать эту тему автор предлагает только в одном номере. Более подробно на системе уравнений автор не останавливается.

Пример 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} \boldsymbol{sinxcosy = -\frac{1}{2},} \\ \boldsymbol{cosxsiny = \frac{1}{2}.} \end{cases}$

Складывая уравнения данной системы и вычитая из второго уравнения первое, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} sinxcosy + cosxsiny = 0, \\ cosxsiny - sinxcosy = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} sin(x+y) = 0, \\ sin(y-x) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \pi n, \qquad n \in Z \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in Z. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим

$$x = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi k = \pi\left(\frac{n}{2} - k - \frac{1}{4}\right),$$

$$y = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k = \pi\left(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{4}\right).$$

Отметим, что в равенствах

$$\begin{cases} x + y = \pi n, \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in Z. \end{cases}$$

буквы n и k могут принимать различные целые значения независимо друг от друга. Если в обоих равенствах написать одну букву n, то будут потеряны решения.

3. Тригонометрические функции. Дети изучают функции $y = cosx, y = sinx, y = tgx$, их свойства и графики. Далее автор переходит к обратным тригонометрическим функциям. Данную главу изучают в 11 классе.

А.Н. Колмогоров «Алгебра и начала математического анализа»

Основные разделы, которые ученики 10-11класса изучают по теме тригонометрия по учебнику А.Н. Колмогорова «Алгебра и начала математического анализа»:

В данном учебнике представлена одна глава – «Тригонометрические функции», в которой дети изучают функции, формулы, уравнения.

1.Тригонометрические функции. Изучение автор начинает с повторения определения синуса, косинуса, тангенса, котангенса, из чего следуют основные тригонометрические тождества:

$$sin^2a + cos^2a = 1;$$

$$tga = \frac{sina}{cosa}; \quad ctga = \frac{cosa}{sina};$$

$$tga \cdot ctga = 1;$$

$$tg^2a + 1 = \frac{1}{cos^2a}; \quad ctg^2a + 1 = \frac{1}{sin^2a}.$$

Автор представляет формулы суммы и разности аргументов синуса, косинуса и тангенса, из которых потом выводит формулы приведения. Но для запоминания формул приведения рекомендует пользоваться мнемоническим правилом. Также автор выводит формулы двойного и половинного аргумента. Далее дается определение функций синус и косинус, их графики, функций тангенс и котангенс и их графики, перечисляются основные свойства функций. Затем автор переходит к решению тригонометрических уравнений и вводит понятия арккосинуса, арксинуса и арктангенса. Решение уравнений начинается с вида $cos\, t = a$, $sin\, t = a, tg\, t = a$, также автор приводит примеры более сложных уравнений, сводящихся к квадратным.

Пример 1. Решить уравнение $\boldsymbol{cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm\, arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z;$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\,, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z.$$

Пример 2. Решить уравнение $\boldsymbol{sinx} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = (-1)^n arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Пример 3. Решить уравнение с$\boldsymbol{tgx} = -\sqrt{\mathbf{3}}$

Это уравнение равносильно уравнению $tg = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$x = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Пример 4. Решить уравнение $\boldsymbol{tgx} + \mathbf{2}\boldsymbol{ctgx} = \mathbf{3}$

Обозначим tgx через y. Поскольку $ctgx = \frac{1}{tgx}$, получаем уравнение $y + \frac{2}{y} = 3$, которое приводится к квадратному $y^2 - 3y + 2 = 0$ (при условии $y \neq 0$). Его корни $y = 2$ и $y = 1$.

1) $tgx = 2$,

$$x = arctg2 + \pi n, n \in Z;$$

$$arctg2 \approx 1{,}11.$$

2) $tgx = 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Пример 5. Решить уравнение $\boldsymbol{sin^2x - sin2x = 0}$

После замены $sin2x$ на $2sinxcosx$ уравнение приводится к виду

$$sin^2x - 2sinxcosx = 0;$$

Разложим левую часть на множители $sinx(sinx - 2cosx) = 0$;

откуда $sinx = 0$; $x = \pi n, n \in Z$.

$$sinx - 2cosx = 0;$$

$$tgx = 2;$$

$$x = arctg2 + \pi n, n \in Z;$$

$$arctg2 \approx 1{,}11.$$

Также автор рассматривает системы уравнений.

Пример 6. Решить систему уравнений $\boldsymbol{\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ sinx = 2siny. \end{cases}}$

Из первого уравнения находим $y = x - \frac{5\pi}{3}$, тогда

$2siny = 2\sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(sinxcos\frac{5\pi}{3} - cosxsin\frac{5\pi}{3}\right) =$

$= 2\left(sinx \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}cosx\right) = sinx + \sqrt{3}cosx$

Второе уравнение системы примет вид $sinx = sinx + \sqrt{3}cosx$,

откуда $cosx = 0$,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Далее находим $y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6}, n \in Z$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n - \frac{7\pi}{6}\right), n \in Z$.

Сравнение учебников. Достоинства и недостатки.

Разобрав материал каждого из учебников, могу выделить некоторые сходства. По наполненности номеров все учебники содержат задания разного уровня, что очень хорошо для дифференцированного обучения. Также изложение теоретического материала описано доступно и понятно для учеников 10-11 классов. Все темы представлены достаточно подробно и обстоятельно. Каждый учебник содержит много примеров, которые авторы подробно расписывают. Также стоит отметить, что структура изучения тригонометрических уравнений в учебниках одинаковая, т.е начинают с уравнений вида $sin\,x = a, cos\,x = a, tg\,x = a$ и постепенно переходят к тригонометрическим уравнениям, сводящимся к квадратным, а также к однородным тригонометрическим уравнениям.

Структура изучения тригонометрии в целом в учебниках различна. По Мордковичу и Колмогорову обучение начинается с определения функций, а в учебнике Алимова - с понятий синус, косинус, тангенс и вывода формул, функции автор вводит в самом конце изучения тригонометрии. По моему мнению, когда дети начинают изучение с понятия функций, в дальнейшем тригонометрия становится понятней и легче усваивается, поэтому я бы отнесла это к недостаткам учебника Алимова.

Стоит обратить внимание, что в учебнике Колмогорова автор не называет способы решения тригонометрических уравнений, а просто приводит примеры различных видов, что, как я считаю, является недостатком данного учебника, в то время как в учебниках Мордковича и Алимова подробно расписаны все методы решения, которые я описала в теоретическом материале. Замечу, что в учебниках Колмогорова и Алимова уделяется отдельное внимание решению систем тригонометрических уравнений, в отличие от учебника Мордковича, что является существенным достоинством.

Отличием учебника Мордковича от двух других является то, что он разделен на две части: собственно учебник, содержащий теоретический материал, и задачник. Учебники Алимова и Колмогорова содержат материалы параграфов, и следом сразу идут номера по данным темам. Наличие отдельного задачника, я считаю, позволяет авторам учебника Мордковича выстроить в нём полноценную как по объёму, так и по содержанию трёхуровневую систему упражнений, достаточную для работы в классе и дома. Разделение теории и практики я отнесу к достоинствам этого учебника. В учебнике Мордковича автор предлагает разработанный алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений второй степени, что отличает этот учебник от рассмотренных мною двух других.

Учебник Колмогорова содержит много различных формул и их выводы, а также большое количество разнообразных номеров. В двух других учебниках этого меньше, что отличает учебник Колмогорова и является его достоинством. В учебнике Алимова понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса вводятся до знакомства с обратными тригонометрическими функциями (тригонометрические функции изучаются в 11 классе), что, по моему мнению, может ввести учеников в заблуждение. При изучении темы «Тригонометрические уравнения» в учебнике Мордковича рассматриваются также примеры на отбор корней в тригонометрических уравнениях, чего нет в двух других. И это является как отличительной чертой, так и большим плюсом этого учебника.

Из всего вышесказанного могу сделать вывод, что учебники (А.Г. Мордкович, Ш.А. Алимов, А.Н. Колмогоров) имеют определенные сходства, а также различия. В каждом учебнике есть свои достоинства и недостатки, которые я описала выше. Среди трех учебников я бы выделила учебник Мордковича А. Г. «Алгебра и начала математического анализа», так в нем есть четкая, последовательная структура изучения тригонометрии, а также доступный, понятный материал.

Содержание практической части

В данной главе, приведу решенные мной уравнения из учебников.

Мордкович А.Г.:

Решение уравнений вида $cost = a$.

1. $cost = a$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим t:

$$t = \pm arccos 1 + 2\pi n, n \in Z,$$

Найдем значение $\arccos 1 = 0$

$$t = 2\pi n, n \in Z.$$

2. $cost = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим t:

$$t = \pm\, arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

Найдем значение $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$,

$$\mathrm{t} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi \mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}.$$

3. $cost = \frac{1}{3}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим t:

$$t = \pm arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

4. $\frac{8cost-3}{3cost+2} = 1$

Приведем уравнение к виду $cost = \mathrm{a}$.

Домножим уравнение на $3cost + 2 \neq 0$, получим:

$$8cost - 3 = 3cost + 2$$

$$5cost = 5$$

Разделим обе части уравнения на 5, получим:

$$cost = 1$$

$$t = 2\pi n, n \in Z.$$

5. $6\cos^2 t + 5\cos t + 1 = 0$

Это – тригонометрическое уравнение, сводящееся к квадратному.

Выполним замену: cost = x

$$6x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{1}{3}$$

Выполним обратную замену: а)$cosx = -\frac{1}{2}$; б)$cosx = -\frac{1}{3}$

$$\text{а)} cosx = -\frac{1}{2}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{б)} cosx = -\frac{1}{3}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = \pm arccos(-\frac{1}{3}) + 2\pi n, n \in Z.$$

6. $\boldsymbol{cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in [-\pi; 3\pi]}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Промежутку $[-\pi; 3\pi]$ принадлежат следующие корни:

$$x_1 = \frac{\pi}{4};\quad x_2 = -\frac{\pi}{4};\quad x_3 = \frac{7\pi}{4};\quad x_4 = \frac{9\pi}{4}.$$

Решение уравнений вида $\boldsymbol{sint = a}$.

1. $\boldsymbol{sint = -1}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим t:

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

2. $\boldsymbol{sinx = \frac{1}{2}, x \in [0; 2\pi]}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

Промежутку $x \in [0; 2\pi]$ принадлежат следующие корни:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; x_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

3. $\boldsymbol{(2cosx + 1)\left(2sinx - \sqrt{3}\right) = 0}$

$$\text{а)}2cosx + 1 = 0 \text{ или б)}2sinx - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{а)}cosx = -\frac{1}{2}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{б)}sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z, x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

4. $\boldsymbol{2cosx - 3sinxcosx = 0}$

Вынесем $cosx$ за скобки, получим:

$$cosx(2 - 3sinx) = 0$$

$$\text{а) } cosx = 0 \text{ или б) } 2 - 3sinx = 0$$

$$\text{а) } cosx = 0$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\text{б)} 2 - 3sinx = 0$$

$$sinx = \frac{2}{3};$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pi - arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ x = arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n; x = \pi - arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n,$ $n \in Z.$

5. $\boldsymbol{4sin^2x - 3sinx = 0}$

Вынесем sinx за скобки, получим:

$$sinx(4sinx - 3) = 0$$

$$\text{а) } sinx = 0 \text{ или б)} 4sinx - 3 = 0$$

$$\text{а)} sinx = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$$\text{б) } 4sinx - 3 = 0$$

$$sinx = \frac{3}{4}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z, \qquad x = \pi - arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pi n, x = arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n,\ n \in Z,\ x = \pi - arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n,$

$n \in Z$.

6 . $6sin^2x + sinx = 2$

$$6sin^2x + sinx - 2 = 0;$$

Получили тригонометрическое уравнение, сводящееся к квадратному.

Замена: $sinx = t, |t| \leq 1.$

$$6t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2}; t_2 = -\frac{2}{3};$$

Обратная замена: а) $sinx = \frac{1}{2}$;

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

б)$sinx = -\frac{2}{3}$;

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in Z, x = \pi - arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Zx = arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n,$

$$n \in Z, x = \pi - arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

Решение уравнений вида $tgx = a, ctgx = a$.

1. $tgx = 1$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = arctg(1) + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

2. $\boldsymbol{tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

3. $\boldsymbol{ctgx = -\sqrt{3}}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = arcctg(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

4. $\boldsymbol{ctgx = 0}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = arcctg(0) + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

5. $\boldsymbol{tg^2x - 2tgx - 3 = 0}$

Это – тригонометрическое уравнение, сводящееся к квадратному.

Замена: $tgx = t$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = 3;\ t_2 = -1$$

Обратная замена: а)$tgx = 3$; б)$tgx = -1$

$$а)tgx = 3;$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = arctg(3) + \pi n, n \in Z$$

$$б)tgx = -1$$

$$x = arctg(-1) + \pi n, n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = arctg(3) + \pi n, n \in Z, x = arctg(-1) + \pi n, n \in Z,$
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

6. $\boldsymbol{ctg(2\pi - x) + tg\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2}$

Используем формулы приведения:

$$-ctgx - ctgx = 2$$

$$-2ctgx = 2$$

$$ctgx = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Далее решу уравнения из параграфа «Тригонометрические уравнения», где представлены уравнения разной сложности. Рассмотрим некоторые из них.

1. $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - cos(\pi + t) = 1}$

Воспользуемся формулами приведения

$$cost + cost = 1$$

$$2cost = 1$$

$$cost = \frac{1}{2}$$

$$t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

2. $\boldsymbol{sin^2\frac{3x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = sinx - cos^2\frac{3x}{4} + 1}$

$$sin^2\frac{3x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - sinx + cos^2\frac{3x}{4} - 1 = 0$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, получим:

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - sinx - 1 = 0$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - sinx = 0$$

$$sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;\ x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

3. $\boldsymbol{tgx - 2ctgx + 1 = 0}$

Умножим уравнение на tgx, получим:

$$tg^2x - 2ctgx \cdot tgx + tgx = 0$$

$$tg^2x + tgx - 2 = 0$$

Решая уравнение, как квадратное относительно $tgx,$ получим:

$$\text{а)}tgx = 1 \text{ или б)}tgx = -2$$

$$\text{а)}tgx = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$\text{б)}tgx = -2; x = -arctg2 + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, x = -arctg2 + \pi n, n \in Z$.

4 . $\boldsymbol{\sqrt{2}sin17x = \sqrt{6}cos17x}$

Разделим обе части уравнения на $cos17x$, получим:

$$\sqrt{2}tg17x = \sqrt{6}$$

$$tg17x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$

$$tg17x = \sqrt{3}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим *17x*:

$$17x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

Поделим правую и левую части на 17:

$$x = \frac{\pi}{51} + \frac{\pi n}{17}, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{51} + \frac{\pi n}{17}, n \in Z.$

5. $\boldsymbol{4sin^2\frac{x}{2} - 3 = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}$

Представив 3 как 3·1 и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, получим

$$4sin^2\frac{x}{2} - 3\left(sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}\right) = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}$$

$$4sin^2\frac{x}{2} - 3sin^2\frac{x}{2} - 3cos^2\frac{x}{2} = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}$$

$$sin^2\frac{x}{2} - 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} - 3cos^2\frac{x}{2} = 0$$

Поделим на $cos^2\frac{x}{2}$:

$$tg^2\frac{x}{2} - 2tg\frac{x}{2} - 3 = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = 3 \text{ или } tg\frac{x}{2} = -1$$

$$\text{а)}tg\frac{x}{2} = 3$$

$$\frac{x}{2} = arctg3 + \pi n, n \in Z$$

$$x = 2arctg3 + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{б)}tg\frac{x}{2} = -1$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}.$$

Ответ: $x = 2arctg3 + 2\pi n, n \in Z, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Алимов Ш.А.:

Решение уравнений вида $\boldsymbol{cost = a}$.

1. $\boldsymbol{cos^2 2x = 1 + sin^2 2x}$

$$cos^2 2x - sin^2 2x = 1$$

Воспользуемся формулой двойного угла, получим:

$$cos4x = 1$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим 4x:

$$4x = 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

2. $\boldsymbol{4cos^2 x = 3}$

$$cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$cosx = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ или } cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

а) $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

б) $cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

3. $\boldsymbol{2\sqrt{2}cos^2x = 1 + \sqrt{2}}$

$$2\sqrt{2}cos^2x - \sqrt{2} = 1$$

Вынесем $\sqrt{2}$ за скобки, получим:

$$\sqrt{2}(2cos^2x - 1) = 1$$

$$2cos^2x - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, получим:

$$2cos^2x - cos^2x - sin^2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos^2x - sin^2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Воспользуемся формулой двойного угла, получим:

$$cos2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$2x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z.$

4. $\boldsymbol{(1 + cosx)(3 - 2cosx) = 0}$

а)$1 + cosx = 0$ или б)$3 - 2cosx = 0$

$cosx = -1$ $\qquad\qquad -2cosx = -3$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z \qquad cosx = 1{,}5 - \text{корней нет}$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

Решение уравнений вида $\boldsymbol{sint = a}$.

1. $\boldsymbol{sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0}$

$$2x + \frac{\pi}{2} = \pi n, n \in Z$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим 2х:

$$2x = -\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

2. $\boldsymbol{sin4xcos2x = cos4xsin2x}$

$$sin4xcos2x - cos4xsin2x = 0$$

Воспользуемся формулой разности аргументов

$$sin(4x - 2x) = 0$$

$$sin2x = 0$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим 2х:

$$2x = \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

3. $\boldsymbol{1 - 4sinxcosx = 0}$

$$1 - 2 \cdot 2sinxcosx = 0$$

Воспользуемся формулой двойного угла, получим:

$$sin2x = \frac{1}{2}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим *2x*:

$$2x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

4. $\boldsymbol{1 + cos5xsin4x = cos4xsin5x}$

$$cos5xsin4x - cos4xsin5x = -1$$

Воспользуемся формулой разности аргументов, получим

$$sin(4x - 5x) = -1$$

$$sin(-x) = -1$$

$$sinx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Решение уравнений вида $\boldsymbol{tgx = a}$.

1. $\boldsymbol{(tgx - 1)(tgx + \sqrt{3}) = 0}$

а)$tgx - 1 = 0$ или б)$tgx + \sqrt{3} = 0$

$$tg = 1 \qquad tgx = -\sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

2. $\boldsymbol{\left(tg\frac{x}{6} + 1\right)(tgx - 1) = 0}$

$tg\frac{x}{6} + 1 = 0$ или $tgx - 1 = 0$

$$а) tg\frac{x}{6} = -1 \qquad б) tgx = 1$$

$$\frac{x}{6} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$x = -\frac{3\pi}{2} + 6\pi n, n \in Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{3\pi}{2} + 6\pi n, n \in Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Далее решу уравнения из параграфа «Тригонометрические уравнения», где представлены уравнения разной сложности. Рассмотрим некоторые из них.

1. $\boldsymbol{1 + 7cos^2x = 3sin2x}$

$$cos^2x + sin^2x + 7cos^2x - 3 \cdot 2sinxcosx = 0$$

$$8cos^2x + sin^2x - 6sinxcosx = 0$$

Поделим на $cos^2x \neq 0$

$$8 + tg^2x - 6tgx = 0$$

Замена $tgx = t$

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$t_1 = 2 \text{ или } t_2 = 4$$

Обратная замена

$$а) tgx = 2 \text{ или } б) tgx = 4$$

$$x = arctg2 + \pi n, n \in Z \qquad x = arctg4 + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = arctg2 + \pi n, n \in Z \qquad x = arctg4 + \pi n, n \in Z.$

2. $\boldsymbol{cos3x - cos5x = sin4x}$

Воспользуемся формулой разности косинусов, получим:

$$-2sin\frac{3x + 5x}{2} \cdot sin\frac{3x - 5x}{2} = sin4x$$

$$-2sin4xsin(-x) = sin4x$$

$$2sin4xsinx - sin4x = 0$$

$$sin4x(2sinx - 1) = 0$$

$$а)sin4x = 0 \text{ или } б)2sinx - 1 = 0$$

$$4x = \pi n \qquad sinx = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z .$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z$ $\quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

3. $\sqrt{3}sinxcosx = sin^2x$

$$\sqrt{3}sinxcosx - sin^2x = 0$$

Вынесем sinx за скобки, получим:

$$sinx\left(\sqrt{3}cosx - sinx\right) = 0$$

$$sinx = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{3}cosx - sinx = 0$$

$$а)sinx = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$$б)\sqrt{3}cosx - sinx = 0$$

Разделим на $cosx \neq 0$, получим

$$\sqrt{3} - tgx = 0$$

$$tgx = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

4. $cos5xcosx = cos4x$

Представим $4x$ как $5x - x$, получим:

$$cos5xcosx = cos(5x - x)$$

Воспользуемся преобразованием разности аргументов в произведение:

$$cos5xcosx = cos5xcosx + sinxsin5x$$

cos5xcosx взаимоуничножаются. Тогда

$$sinx \cdot sin5x = 0$$

$$а)sinx = 0 \text{ или } б)sin5x = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z \quad 5x = \pi n, n \in Z$$

$$x=\frac{\pi n}{5}, n\in Z.$$

Ответ: $x=\pi n, n\in Z, x=\frac{\pi n}{5}, n\in Z.$

5. $\boldsymbol{sinx+\frac{1}{sinx}=sin^2x+\frac{1}{sin^2x}}$

Замена: $sinx=a$

$$a+\frac{1}{a}=a^2+\frac{1}{a^2}$$

Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{a^3+a-a^4-1}{a^2}=0$$

$$\frac{a^3(1-a)+(a-1)}{a^2}=0$$

$$(a^3-1)(1-a)=0$$

$$a=1$$

Обратная замена

$$sinx=1$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$

Колмогоров А. Н.:

Уравнения вида $\boldsymbol{cosx=a, sinx=a, tgx=a}$

1. $\boldsymbol{2cosx+\sqrt{3}=0}$

$$2cosx=-\sqrt{3}$$

$$cosx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z.$$

Ответв: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

2. $\mathbf{2sinx + \sqrt{2} = 0}$

$$sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим *x:*

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

3. $\mathbf{t\,gx + \sqrt{3} = 0}$

$$tg = -\sqrt{3}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

4. $\mathbf{2\,cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}}$

$$cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$.

5. $\mathbf{2\,sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}}$

$$sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3x-\frac{\pi}{4}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$

$$3x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$

$$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$.

6. $\boldsymbol{\sqrt{3}tg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=3}$

$$tg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$tg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$$

$$\frac{x}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$$

$$\frac{x}{3}=\pi n, n\in Z$$

$$x=3\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $x=3\pi n, n\in Z$.

7. $\boldsymbol{sin3xcosx-cos3xsinx=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Воспользуемся формулой разности аргументов, получим:

$$sin2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим *2x*:

$$2x=(-1)^{n}\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$$

$$x=(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$.

8. $6cos^2x + cosx - 1 = 0$

$$\text{Замена:}\, cosx = t, t \in [-1; 1]$$

$$6t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = -\frac{1}{2}$$

Обратная замена

$$\text{а)} cosx = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\text{б)} cosx = -\frac{1}{2}$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим *x:*

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

9. $2cos^2x + sinx + 1 = 0$

$$2(1 - sin^2x) + sinx + 1 = 0$$

$$2 - 2sin^2x + sinx + 1 = 0$$

$$-2sin^2x + sinx + 3 = 0$$

$$\text{Замена:}\, sinx = t, t \in [-1; 1]$$

$$-2t^2 + t + 3 = 0$$

$$t_1 = -1, t_2 = \frac{3}{2} - \text{посторонний корень}$$

Обратная замена

$$sinx = -1$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим х:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

10. $\boldsymbol{2cos^2x + \sqrt{3}cosx = 0}$

Вынесем cosx за скобки, получим:

$$cosx(2cosx + \sqrt{3}) = 0$$

а)$cosx = 0$ или б)$2cosx + \sqrt{3} = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \quad cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

11. $\boldsymbol{3sin^2x + sinxcosx = 2cos^2x}$

$$3sin^2x + sinxcosx - 2cos^2x = 0$$

Однородное уравнение, будем решать с помощью деления уравнения на $cos^2x \neq 0$

$$3tg^2x + tgx - 2 = 0$$

Получили квадратное уравнение, выполним замену $tgx = t, t \in R$

$$3t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = -1, t_2 = \frac{2}{3}$$

Обратная замена

а)$tgx = -1$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим х:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

б)$tgx = \frac{2}{3}$

$$x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$.

12. $\boldsymbol{sin2x - cosx = 0}$

Воспользуемся формулой двойного угла, получим:

$$2sinxcosx - cosx = 0$$

$$cosx(2sinx - 1) = 0$$

а)$cosx = 0$ или б)$2sinx - 1 = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \quad sinx = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

13. $\boldsymbol{\frac{3}{5tgx+8} = 1}$

$$5tgx + 8 = 3$$

$$5tgx = -5$$

$$tgx = -1$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим х:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

14. $\boldsymbol{cos5x - cos3x = 0}$

Воспользуемся формулой разности косинусов, получим:

$$-2sinx \cdot sin4x = 0$$

а)$sinx = 0$ или б)$sin4x = 0$

$$x = \pi n, n \in Z. \quad 4x = \pi n, n \in Z.$$

$$x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z,\ \ x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$

Решив данные уравнения из учебников Мордковича, Алимова, Колмогорова, можно отметить, что все три учебника имеют одинаковую структуру решения тригонометрических уравнений, то есть, в практической части сначала идут простейшие тригонометрические уравнения, о которых в теоретической части я писала выше, решение которых сводится к формулам, по которым нужно найти значение тригонометрической функции. Стоит отметить, что в учебниках Мордковича и Алимова гораздо больше задач такого типа. Также в каждом из учебников присутствуют тригонометрические уравнения различных аргументов. В учебнике Колмогорова набор таких практических заданий скудный. Для отработки автор предлагает решить пару номеров. Далее все три учебника содержат уравнения, сводящиеся к квадратным, однородные уравнения и уравнения, решаемые с помощью формул. Алимов предлагает интересные и разнообразные задачи, связанные с формулами (формула разности аргументов, формула разности косинусов, формула двойного угла) в отличие от Мордковича и Колмогорова. Эти примеры продемонстрированы в примерах по учебнику Алимова «уравнения разной сложности». Также все учебники имеют общие уравнения, при решении которых не требуется дополнительных преобразований, а также имеются и более сложные уравнения, при решении которых сначала нужно ученику сообразить, как преобразовать тригонометрическое уравнение, что бы привести его к стандартному виду.

Тригонометрия ЕГЭ

Рассмотрим задания, которые встречаются в ЕГЭ по математике. Номера по тригонометрии встречаются как в базовом уровне, так и в профильном.

В ЕГЭ база это №16. Задание двух типов:

1. Вычисление значений тригонометрических выражений.

2. Преобразование числовых тригонометрических выражений.

Рассмотрим первый тип. Для успешного выполнения этого задания нужно знать основное тригонометрическое тождество $(cos^2x + sin^2x = 1)$, а также нужно уметь определять знак функции на промежутке заданном либо радианной мерой угла, либо градусной.

Пример 1. Найдите $tg\alpha$, если $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Так как угол α лежит в 4 четверти, его тангенс отрицателен.

$$tg\alpha = -\frac{sin\alpha}{cos\alpha}, \text{зная что } sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}, \text{преобразуем } tg\alpha, \text{получим}$$

$$tg\alpha = -\sqrt{\frac{1}{cos^2\alpha} - 1}, \text{подставим значение } \cos\alpha \text{ в формулу, получим}$$

$$tg\alpha = -\sqrt{10 - 1} = -3$$

Ответ: -3

Пример 2. Найдите $tg\alpha$, если $sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Так как угол α лежит в 3 четверти, его тангенс положителен, а косинус отрицателен.

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}, \qquad cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{25}{26}} = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$tg\alpha = \frac{\frac{5}{\sqrt{26}}}{\frac{1}{\sqrt{26}}} = 5$$

Ответ: 5

Пример 3. Найдите $3cos\alpha$, если $sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Так как угол α лежит в 4 четверти, его косинус положителен

$$3cos\alpha = 3 \cdot \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Ответ: 1

Пример 4. Найдите $5sin\alpha$, если $cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Так как угол α лежит в 4 четверти, его синус отрицателен

$$5sin\alpha = -5 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = -5 \cdot \sqrt{1 - \frac{24}{25}} = -5 \cdot \frac{1}{5} = -1$$

Ответ: -1

Пример 5. Найдите $sin\alpha$, если $cos\alpha = 0{,}6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$

Так как угол α лежит в 3 или 4 четверти, его синус отрицателен

$$sin\alpha = -\sqrt{1 - 0{,}6^2} = -\sqrt{0,64} = -0{,}8$$

Ответ: -0,8

Пример 6. Найдите $cos\alpha$, если $sin\alpha = -0{,}8$ и $180° < \alpha < 270°$

Так как угол α лежит в 3 четверти, его косинус отрицателен

$$cos\alpha = -\sqrt{1 - 0{,}8^2} = -\sqrt{0,36} = -0{,}6$$

Ответ: -0,6

Рассмотрим второй тип задания 16, в котором нужно уметь вычислять значения углов, пользоваться формулами приведения, а также знать про четность и нечетность тригонометрических функций.

Пример 1. Найдите значение выражения $-4\sqrt{3}cos(-750°)$

Так как функция косинус - четная, то выражение можно записать в виде $-4\sqrt{3}\,cos\,750\,°$. Представим угол 750° как сумму углов 720°+30° и воспользуемся формулой приведения, получим

$$-4\sqrt{3}cos30° = -4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -6$$

Ответ: -6

Пример 2. Найдите значение выражения $2\sqrt{3}tg(-300°)$

Разложим угол $-300° = -360° + 60°$ и воспользуемся формулой приведения

$$2\sqrt{3}tg(-360° + 60°) = 2\sqrt{3}tg60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$$

Ответ: 6

Пример 3. Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}sin(-135°)$

$$-18\sqrt{2}\,sin(-135°) = -18\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 18$$

Ответ: 18

Пример 4. Найдите значение выражения $5tg17° \cdot tg107°$

$$5tg17° \cdot tg107° = 5tg17° \cdot tg(90° + 17°) = 5tg17° \cdot (-ctg17°) = -5$$

Котангенс в 3 четверти отрицательный.

Ответ: -5

Пример 5. Найдите значение выражения $7tg13° \cdot tg77°$

Разложим $tg13°$ как разность углов 90°и 77° , воспользуемся формулой приведения, получим

$$7tg13° \cdot tg77° = 7tg(90° - 77°) \cdot tg77° = 7ctg77° \cdot tg77° = 7$$

Ответ: 7

Пример 6. Найдите значение выражения $12sin150° \cdot cos120°$

Разложим градусную меру углов синуса и косинуса и воспользуемся формулой приведения

$$12sin150° \cdot cos120° = 12\,sin(180° - 30°) \cdot cos(90° + 30°)$$

$$= 12sin30° \times (-sin30°) = -12 \cdot \frac{1}{4} = -3$$

Ответ: -3

Рассмотрим тригонометрические уравнения из ЕГЭ (профиль)

Они встречаются в первой части в 5 номере (простейшие уравнения) и во второй части ЕГЭ в 12 номере.

Пример 1. Найдите корни уравнения $\pi cos\frac{(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

$$\frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z;$$

$$\pi(x-7)=\pm\pi+6\pi n, n\in Z;$$

$$x-7=\pm1+6n, n\in Z;$$

$$x=8+6n, n\in Z;$$

$$x=6+6n, n\in Z.$$

При $n\geq 0$ корни уравнения будут положительными, а нам нужны отрицательные.

Возьмём $n\leq 0$:

Если $n=-1$, то $\mathrm{x}=2$ и $\mathrm{x}=0$;

Если $n=-2$, то $\mathrm{x}=-4$ и $\mathrm{x}=-6$;

Если $n=-3$, то $\mathrm{x}=-10$ и $\mathrm{x}=-12$.

Далее значения корней будут только уменьшаться, а нам нужен наибольший отрицательный корень, следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4.

Ответ: -4

Пример 2. Решите уравнение $tg\frac{\pi x}{4}=-1$. В ответ напишите наибольший отрицательный корень.

$$\frac{\pi x}{4}=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$$

$$x=-1+4n, n\in Z$$

При $n>0$ x будет принимать положительные значения, рассмотрим $n\leq 0$:

При $n=-1$ $x=-5$.

При уменьшении n, значение x так же будет уменьшаться, значит при $n=0$ корень принимает наибольшее отрицательное значение -1.

Ответ: -1

Пример 3. Решите уравнение $sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$. В ответ напишите наименьший положительный корень.

$$а)\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{1}{2} + 6n, n \in Z;$$

$$а)\frac{\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{5}{2} + 6n, n \in Z;$$

При $n < 0$ x принимает отрицательные значения, значит будем рассматривать $n \geq 0$:

Наименьшему положительному n соответствует наименьший положительный корень

$$\text{Если } n = 0, \text{то x} = 0{,}5 \text{ и x} = 2{,}5;$$

$$\text{Если } n = 1, \text{то x} = 6{,}5 \text{ и x} = 8{,}5.$$

При увеличении n x увеличивается.

Наименьшим положительным корнем будет число 0,5.

Ответ: 0,5

Перейдём ко второй части ЕГЭ. Уравнения из первой и второй частях отличаются тем, что во второй части под пунктом б нужно произвести отбор корней на заданном промежутке и , как правило, уравнения из второй части сложнее первой. По тригонометрическим уравнениям в 12 номере представлены 3 типа уравнений:

1. Квадратные тригонометрические уравнения, либо же сводимые к квадратным уравнениям.

2. Тригонометрические уравнения, решаемые разложением на множители.

3. Тригонометрические уравнения смешанного типа.

Пример 1.

а) Решите уравнение $cos2x = sin(x + \frac{\pi}{2})$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку$[-2\pi; -\pi]$.

Воспользуемся формулой косинуса двойного угла и формулой приведения синуса, получим:

$$cos^2x - sin^2x = cosx$$

$$cos^2x - 1 + cos^2x = cosx$$

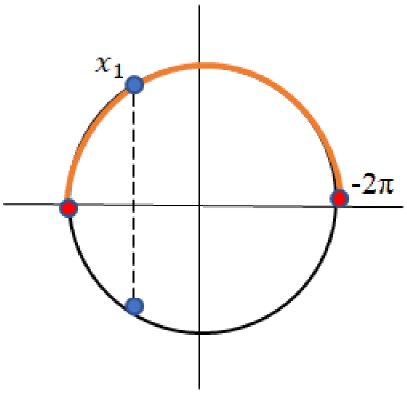
$$2cos^2x - cosx - 1 = 0$$

Найдем корни квадратного, тригонометрического уравнения.

$$a)cosx = 1 \qquad б)cosx = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2\pi n, n \in Z \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.



$x_1 = -\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

$x_2 = -2\pi$

Ответ: а) $2\pi n, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}$.

Пример 2.

а) Решите уравнение $4cos^4x - 4cos^2x + 1 = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку$[-2\pi; -\pi]$.

Выделим полный квадрат, получим:

$$(2cos^2x-1)^2=0$$

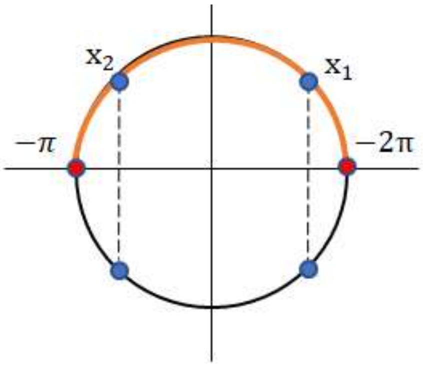
$$2cos^2x=1$$

$$cos^2x=\frac{1}{2}$$

$$cosx=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad cosx=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z \qquad x=\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z\ .$$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi;-\pi]$.



$$x_1=-2\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{4}$$

$$x_2=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{4}$$

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z \qquad x=\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$. б) $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Пример 3.

а) Решите уравнение $sin2x+\sqrt{3}sinx=0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку$\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

Воспользуемся формулой разложения синуса двойного угла, получим:

$$2sinxcosx+\sqrt{3}sinx=0$$

Вынесем sinx как общий множитель, получим:

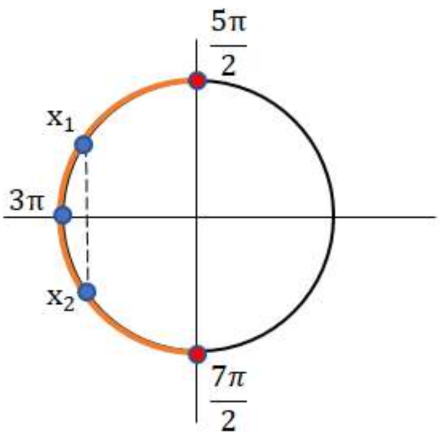
$$sinx(2cosx+\sqrt{3})=0$$

$$sinx=0 \qquad\qquad 2cosx+\sqrt{3}=0$$

$$x = \pi n, n \in Z \qquad\qquad cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.



$$x_1 = 3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{5}$$

$$x_2 = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{5}$$

Ответ: а) $\pi n, n \in Z;\ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$ б) $\frac{17\pi}{5}; \frac{19\pi}{5}$.

Пример 4.

а) Решите уравнение $sin2x + \sqrt{2}sinx = 2cosx + \sqrt{2}$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Воспользуемся формулой синуса двойного угла, вынесем sinx за скобки, получим:

$$2sinxcosx + \sqrt{2}sinx = 2cosx + \sqrt{2}$$

$$sinx(2cosx + \sqrt{2}) = 2cosx + \sqrt{2}$$

$$sinx\left(2cosx + \sqrt{2}\right) - \left(2cosx + \sqrt{2}\right) = 0$$

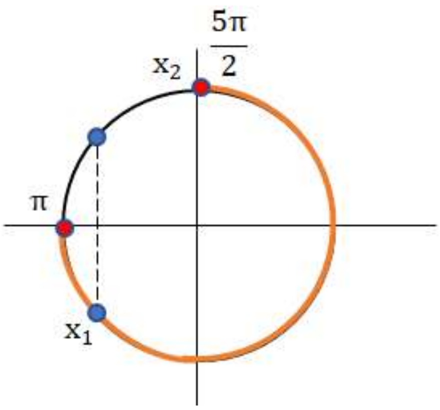
$$(sinx - 1)\left(2cosx + \sqrt{2}\right) = 0$$

$$sinx - 1 = 0 \qquad 2cosx + \sqrt{2} = 0$$

$$sinx = 1 \qquad cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \qquad x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



$$x_1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{2}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ б) $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Пример 5.

а) Решите уравнение $2cos^3x - cos^2x + 2cosx - 1 = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку$\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

$$2cos^3x - cos^2x + 2cosx - 1 = 0$$

$$cos^2(2cosx - 1) + (2cosx - 1) = 0$$

$$(cos^2x + 1)(2cosx - 1) = 0$$

$$а) cos^2x + 1 = 0$$

$$б) 2cosx - 1 = 0$$

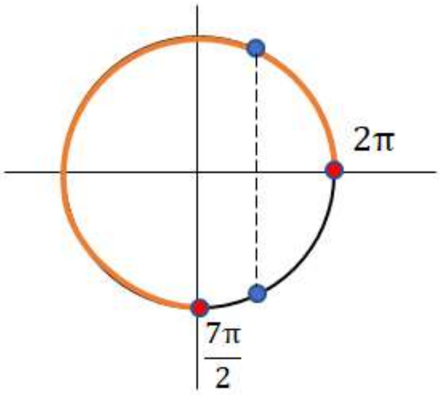
а)$cos^2x + 1 = 0$

$cos^2x = -1 -$ решений нет

б)$2cosx-1=0 \quad cosx=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.



$x_1=2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$ б) $\frac{7\pi}{3}$

Пример 6.

а) Решите уравнение $(2cosx+1)(\sqrt{-sinx}-1)=0.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

$$(2cosx+1)(\sqrt{-sinx}-1)=0$$

Уравнение содержит область допустимых значений, получим систему:

$$\begin{cases} -sinx\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2cosx+1=0 \\ \sqrt{-sinx}-1=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

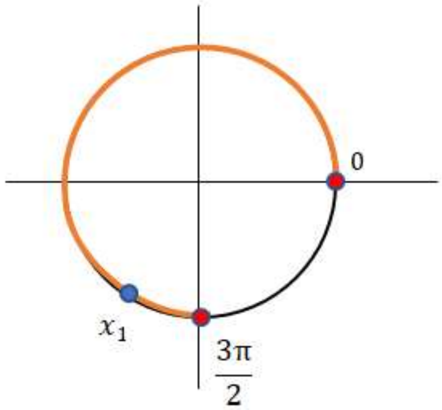
$$\begin{cases} sinx\leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} cosx=-\frac{1}{2} \\ sinx=-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Так как уравнение имеет ограничения $sinx \leq 0$, то корень $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$, выпадет.

$$\left[\begin{array}{l} cosx = -\frac{1}{2} \\ sinx = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.



$$x_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Ответ: а) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ б) $\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$

Заключение

В проделанной мной работе была изучена история тригонометрии; проведён анализ учебников 10-11 классов по разделу тригонометрия; разобраны различные и сходные примеры, приведённые в учебниках. Прорешаны задачи по каждому из учебников; разобраны типы задач из ЕГЭ, связанные с решением тригонометрических уравнений. А также прорешено большое количество тригонометрических уравнений.

Список использованных источников

1. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И. Алгебра и начала анализа 10-11 класс - М.: Москва, просвещение. - 2016.
2. Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Ивлев Б. М., Швацбурд С. И. Алгебра и начала анализа 10-11 класс - М.: Москва, просвещение. - 2011.
3. Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс - М.: Москва, просвещение. - 2013.
4. История тригонометрии : сайт. – URL: https://vuzlit.com/927141/istoriya_trigonometrii?ysclid=lcysti4fl5628649813
5. Решу ЕГЭ : сайт. – URL: https://mathb-ege.sdamgia.ru/