

Способы решения тригонометрических уравнений.

Автор: Егорова Полина Андреевна

Цель работы: исследовать различные подходы к изучению тригонометрических уравнений в школьных учебниках различных авторов, выяснить их сходства и различия, достоинства и недостатки, разобрать способы решения тригонометрических уравнений из школьных учебников 10-11 классов, рассмотреть тригонометрические уравнения из ЕГЭ.

Задачи: провести анализ учебников 10-11 классов по разделу тригонометрия; разобрать различные и сходные примеры, приведённые в учебниках; прорешать задачи по каждому из учебников, разобрать типы задач из ЕГЭ, связанные с решением тригонометрических уравнений и прорешать их.

История развития тригонометрии

- Одним из основоположников тригонометрии считается древнегреческий астроном Гиппарх, живший во II в. до н. э.
- Азербайджанский ученый Насир ад-Дин ат-Туси написал "Трактат о полном четырехугольнике".
- Немецкий ученый Иоганн Мюллер издал труд "Пять книг о треугольниках всех видов»



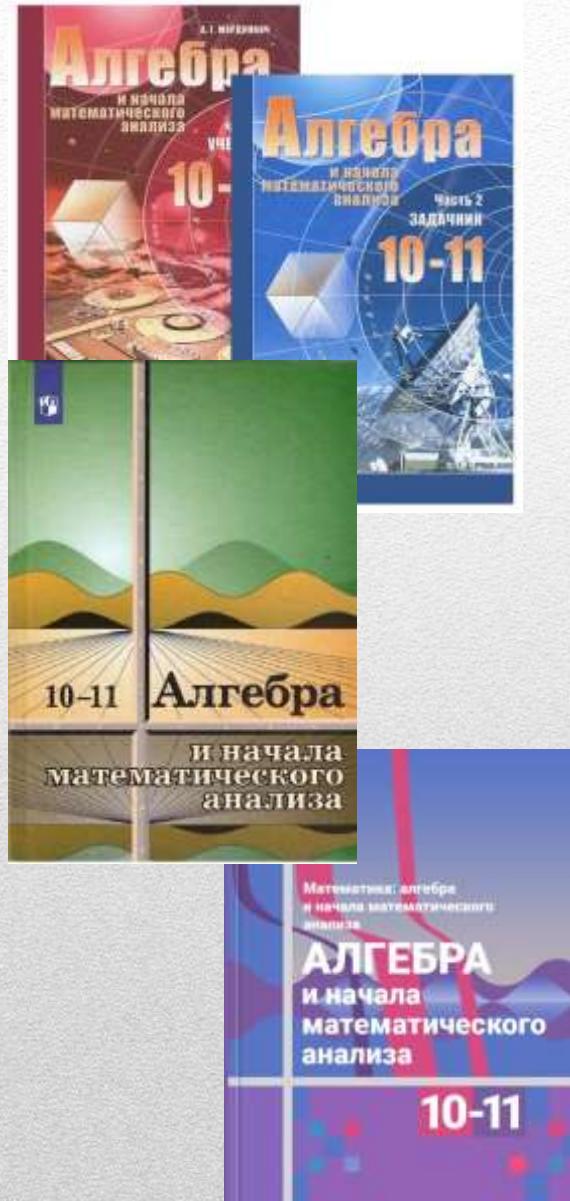
История тригонометрии

- Появился труд Бартоломеуса Питискуса "Тригонометрия, или Краткий обзорный трактат о решении треугольников".
- Современный вид тригонометрия получила в трудах великого ученого, члена Российской академии наук Л. Эйлера.
- В 1848 г. академик М.В. Остроградский предложил систему индуктивного изучения тригонометрии.



Анализ учебников

№	Авторы	Название	Школьные классы	Издательств о	Год
1	Мордкович А. Г., Семёнов П. В.	«Алгебра и начала математическо- го анализа»	10-11	Москва, Мнемозина	2013
2	Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Ивлев Б. М., Швацбурд С. И.	«Алгебра и начала математическо- го анализа»	10-11	Москва, просвещение	2011
3	Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И.	«Алгебра и начала математическо- го анализа»	10-11	Москва, просвещение	2016



Сравнение учебников

Сходства	Различия
1. Все учебники содержат задания разного уровня, что очень хорошо для дифференцированного обучения.	1. Структура изучения тригонометрии в целом в учебниках различна.

2. Каждый учебник содержит много примеров, которые авторы подробно расписывают.

2. Учебник Мордковича разделен на две части: учебник, содержащий теоретический материал, и задачник, в отличие от двух других.

3. Изложение теоретического материала описано доступно и понятно для учеников 10-11 классов.	3. В учебнике Мордковича присутствуют примеры на отбор корней в тригонометрических уравнениях, чего нет в двух других учебниках.
4. Структура изучения тригонометрических уравнений в учебниках одинаковая.	4. В учебнике Колмогорова автор не называет способы решения тригонометрических уравнений.

$$1 + 7\cos^2 x = 3\sin 2x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 7\cos^2 x - 3 \cdot 2\sin x \cos x = 0$$

$$8\cos^2 x + \sin^2 x - 6\sin x \cos x = 0$$

Поделим на $\cos^2 x \neq 0$:

$$8 + \tan^2 x - 6\tan x = 0$$

Замена $\tan x = t$

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$t_1 = 2 \text{ или } t_2 = 4$$

Обратная замена:

$$\text{а) } \tan x = 2 \text{ или б) } \tan x = 4$$

$$x = \arctan 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \arctan 4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \arctan 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \arctan 4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$$

Воспользуемся формулой разности косинусов, получим:

$$-2\sin \frac{3x+5x}{2} \cdot \sin \frac{3x-5x}{2} = \sin 4x$$

$$-2\sin 4x \sin(-x) = \sin 4x$$

$$2\sin 4x \sin x - \sin 4x = 0$$

$$\sin 4x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\text{a}) \sin 4x = 0 \text{ или } \text{б}) 2\sin x - 1 = 0$$

$$4x = \pi n \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z; \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

$$3. \quad 2\cos^2x + \sin x + 1 = 0$$

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x + 1 = 0$$

$$2 - 2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x + \sin x + 3 = 0$$

Замена: $\sin x = t, t \in [-1; 1]$

$$-2t^2 + t + 3 = 0$$

$$t_1 = -1, t_2 = \frac{3}{2} \text{ — посторонний корень}$$

Обратная замена:

$$\sin x = -1$$

Пользуясь формулами корней простых тригонометрических уравнений, находим x :

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример из ЕГЭ

а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \cos x + \sqrt{2}$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Воспользуемся формулой синуса двойного угла, вынесем $\sin x$ за скобки, получим:

$$2\sin x \cos x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}$$

$$\sin x(2\cos x + \sqrt{2}) = 2\cos x + \sqrt{2}$$

$$\sin x(2\cos x + \sqrt{2}) - (2\cos x + \sqrt{2}) = 0$$

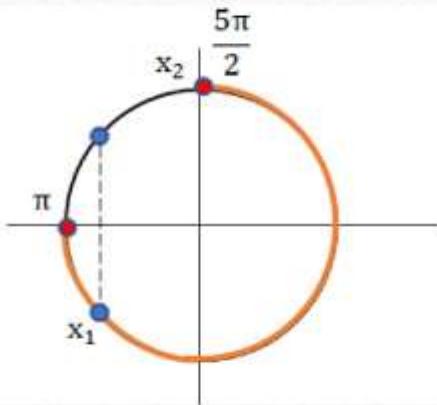
$$(\sin x - 1)(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\sin x - 1 = 0 \quad 2\cos x + \sqrt{2} = 0$$

$$\sin x = 1 \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



$$\frac{3\pi}{4} < \pi; \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi > \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{4} < \pi; \quad -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{3\pi}{4} + 4\pi > \frac{5\pi}{2}$$

Значит, на $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ есть только один корень $\frac{5\pi}{4}$

$$x_1 = \frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} < \pi; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]; \quad \frac{\pi}{2} + 4\pi > \frac{5\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{2}$$

Значит, на $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ есть только один корень $\frac{5\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

Список литературы

- Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И. Алгебра и начала анализа 10-11 класс - М.: Москва, просвещение. - 2016.
- Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Ивлев Б. М., Швацбурд С. И. Алгебра и начала анализа 10-11 класс - М.: Москва, просвещение. - 2011.
- Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс - М.: Москва, просвещение. - 2013.
- История тригонометрии : сайт. – URL: https://vuzlit.com/927141/istoriya_trigonometrii?ysclid=lcysti4f15628649813
- Решу ЕГЭ : сайт. – URL: <https://mathb-ege.sdamgia.ru/>